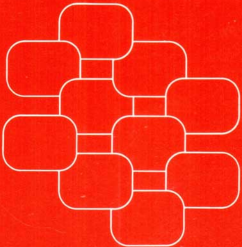
ANDRES NORTES CHECA

3ª EDICION

300 problemas de matemáticas



tema

MAGISTERIO

300 problemas de matemáticas

1.ª edición: Marzo 1981
2.ª edición: Enero 1983
3.ª edición: Abril 1984

Imprime: MINUESA, S. L.
Ronda de Toledo, 24 - Madrid-5
Depósito Legal: M. 12.871-1984
ISBN: 84-300-4210-5

ANDRES NORTES CHECA
Ldo. Ciencias Matemáticas
Estadístico

300 problemas de matemáticas

PARA:
- Escuelas Universitarias de Magisterio.
- Prueba A) Oposiciones E.G.B.

PUBLICACIONES
tema
Merced, 7
☎ (968) 26 75 74 y 24 28 29
MURCIA-1

PRESENTACION

Bajo el título «300 problemas de matemáticas» presentamos un libro de problemas destinado a alumnos de Primer Curso de Escuelas Universitarias de Magisterio y a Diplomados que preparan Oposiciones para ingresar en el Cuerpo de Profesores de Educación General Básica.

El contenido del libro se ajusta a los temas correspondientes a la Prueba General (Primer Ejercicio) de Oposiciones a Profesor de E.G.B., siendo diez los capítulos en que lo hemos dividido: 1) Conjuntos, 2) Relaciones, 3) Aplicaciones, 4) Número natural, 5) Sistemas de Numeración, 6) Divisibilidad, 7) Números enteros y racionales, 8) Areas de Figuras Planas, 9) Geometría del plano y 10) Traslaciones, Giros y Simetrías.

En cada capítulo introducimos unos Conceptos teóricos que ayudarán al alumno en la comprensión de los problemas planteados y resueltos.

Hemos recopilado los problemas aparecidos en la Prueba A) de Oposiciones a E.G.B. desde 1974 hasta 1980, con la finalidad de mostrar la pauta en este tipo de Ejercicios.

Este libro «300 problemas de matemáticas» sigue la línea emprendida en el texto «Matemáticas 1.º de Escuelas U. del Profesorado de EGB» editado por Ed. Santiago Rodríguez, del que se han hecho hasta el momento 5 ediciones y que completa la teoría allí expuesta.

Se ha tenido muy en cuenta la diversidad de conocimientos matemáticos de los usuarios de este libro ya que los Diplomados pueden haber cursado la Especialidad de Ciencias Físico-Matemáticas o no, siendo estos últimos los que a buen seguro obtendrán la ayuda que necesitan. Por otro lado los estudiantes de Primer Curso de Magisterio verán aumentado el número de aplicaciones prácticas tan necesario para una total comprensión de los conocimientos teóricos.

Debido a que en la actualidad las Escuelas Universitarias de Magisterio no se rigen por un programa unificado para todas ellas habrá Escuelas que su programa de Matemáticas 1.º se ajuste a los capítulos aquí desarrollados y las habrá también que sólo les cubra parte del programa. En cualquier caso estamos seguros que la utilidad del presente libro está garantizada.

El libro ha sido pensado, redactado y editado con la finalidad de prestar un servicio al alumnado, a los diplomados y en definitiva al Magisterio en cuyo seno me encuentro, dedicado a la formación del futuro profesor de EGB en la Escuela Universitaria de Murcia.

Murcia, marzo 1981
Andrés NORTES CHECA

NOTA A LA SEGUNDA EDICION

En sólo unas líneas vamos a resumir las innovaciones que presentamos en este renovado libro titulado «300 problemas de matemáticas».

Hemos corregido las erratas que durante el período de existencia de la primera edición han ido apareciendo. Aquí quiero reconocer su labor a mis alumnos de Primer Curso de la Escuela Universitaria del Profesorado de E.G.B. de Murcia por las aportaciones recibidas.

Hemos enriquecido y actualizado el texto introduciendo los problemas correspondientes a la Prueba A) de Oposiciones a Profesores de E.G.B. de los años 1981 y 1982.

Hemos compuesto y maquetado nuevamente el libro para que resulte más agradable y atractiva su lectura.

Por último agradecer la atención recibida en la primera edición que nos ha posibilitado corregir, actualizar y renovar el libro «300 problemas de matemáticas» que hoy ponemos nuevamente a su disposición.

Murcia, enero 1983
El autor

NOTA A LA TERCERA EDICION

Desde que se publicó la segunda edición de «300 problemas de matemáticas» hasta estos momentos en que aparece la tercera edición ha habido una modificación en los temarios de oposiciones al Cuerpo de Profesores de E.G.B.

Los Programas Renovados de E.G.B. para el Ciclo Superior, aunque no implantados todavía, dieron lugar a que los temas de la prueba A de oposiciones sufrieran una ligera modificación lo que llevó a que las Escuelas Universitarias del Profesorado de E.G.B. adaptaran los contenidos de matemáticas a las nuevas necesidades que la sociedad demanda del futuro profesor de E.G.B.

El incremento de la Geometría métrica en los contenidos del Ciclo Superior, con una mayor amplitud de conocimientos, hizo que en septiembre pasado publicáramos el libro «Matemáticas para magisterio 1» recogiendo en un bloque de 5 capítulos los conceptos básicos de esta parte de las matemáticas necesarios para contestar con amplitud a los temas de geometría, tanto de la Prueba A (general) como de la Prueba B (específica para el área de matemáticas).

Los capítulos estructurados en el libro «300 problemas de matemáticas» tienen plena vigencia tanto para el estudiante de magisterio como para el opositor al Cuerpo de Profesores de E.G.B. por lo que hemos optado por preparar esta 3.ª edición en la que se incluye como novedad la resolución de los ejercicios propuestos en la Prueba A de oposiciones desde 1974 hasta 1983 inclusive.

Murcia, abril 1984

1. Conjuntos

CONCEPTOS TEORICOS

— **Conjunto:** Colección de objetos.

— **Subconjunto:** $A \subset B$ si todo elemento de A lo es de B.

— **Diferencia de conjuntos:** $A - B = \{ x \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}$

— **Conjunto complementario:** Si $B \subset A \Rightarrow \overline{B}_A = A - B$

— **Unión de conjuntos:** $A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ ó } x \in B\}$

— **Intersección de conjuntos:** $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$

— **Conjuntos disjuntos:** $A \cap B = \phi$

— **Partición:** Una partición de A si existen dos subconjuntos B y C tales que

$$A = B \cup C$$

$$\phi = B \cap C$$

— **Fórmulas de De Morgan**

1) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

2) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

— **Número de elementos de la unión de dos conjuntos**

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

PROBLEMAS

1. Dados los conjuntos

$$A = \{n \mid n = \dot{3} + 1, \quad 1 \leq n \leq 30\}$$
$$B = \{n \mid n = \dot{5} + 2, \quad 1 \leq n \leq 30\}$$
$$C = \{n \mid n = \dot{2}, \quad 1 \leq n \leq 30\}$$

Hallar:

1) $(A \cup B) \cap C$

2) $(A - B) \cap C$

3) $A - (B - C)$

Solución:

1) $(A \cup B) \cap C = \{2, 4, 10, 12, 16, 22, 28\}$

2) $(A - B) \cap C = \{4, 10, 16, 28\}$

3) $A - (B - C) = \{1, 4, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28\}$

2. Dados los conjuntos

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$
$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$B = \{3, 4, 5\}$$
$$C = \{6, 7, 8, 9\}$$
$$D = \{4, 5, 6, 7\}$$

Considerando el conjunto U como universal hallar:

1) A^c; *2)* B^c; *3)* C^c; *4)* U^c; *5)* $A^c \cap B$; *6)* $A^c \cup B$; *7)* $A \cap B^c$;

8) $A \cup B^c$; *9)* $C \cup D^c$; *10)* $C \cap D^c$; *11)* $C^c \cap D$; *12)* $B^c \cap D^c$;

13) $B^c \cup D^c$; *14)* $(B^c \cap D^c)^c$; *15)* $(B^c \cup D^c)^c$; *16)* $(C^c \cap D)^c$

Solución:

1) $A^c = \{ 7, 8, 9 \}$

2) $B^c = \{ 1, 2, 6, 7, 8, 9 \}$

3) $C^c = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$

4) $U^c = \phi$

5) $A^c \cap B = \phi$

6) $A^c \cup B = \{ 3, 4, 5, 7, 8, 9 \}$

7) $A \cap B^c = \{ 1, 2, 6 \}$

8) $A \cup B^c = U$

9) $C \cup D^c = \{ 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9 \}$

10) $C \cap D^c = \{ 8, 9 \}$

11) $C^c \cap D = \{ 4, 5 \}$

12) $B^c \cap D^c = \{ 1, 2, 8, 9 \}$

13) $B^c \cup D^c = \{ 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9 \}$

14) $(B^c \cap D^c)^c = \{ 3, 4, 5, 6, 7 \}$

15) $(B^c \cup D^c)^c = \{ 4, 5 \}$

16) $(C^c \cap D)^c = \{ 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9 \}$

3. Dados los conjuntos

$A = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$

$B = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$

$C = \{ 3, 4, 5 \}$

$D = \{ 3, 5 \}$

$E = \{ 2, 4, 6, 8 \}$

Determinar el conjunto X en cada uno de los siguientes casos, sabiendo que el conjunto X es uno de los conjuntos dados *a)* $X \cap B = \phi$

b) $X \subset C$

c) $X \subset A$ y $X \not\subset B$

d) $X \subset B$ y $X \not\subset E$

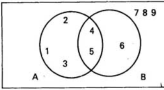
Solución

a) E *b)* D *c)* E y C *d)* D

4. Determinar los elementos de los conjuntos A y B contenidos en U sabiendo que

$$A' = \{ 6, 7, 8, 9 \}$$
$$A \cup B = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$
$$A \cap B = \{ 4, 5 \}$$

Solución



$$(A \cup B) - (A \cap B) = \{1, 2, 3, 6\}$$
$$[(A \cup B) - (A \cap B)] \cap A' = \{6\}$$
$$\{[A \cup B) - (A \cap B)] \cap A'\} \cup (A \cap B) = \{4, 5, 6\} = B$$

Por lo tanto

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$A \cup A' = U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

5. Determinar los elementos de los subconjuntos A y B contenidos en U sabiendo que

$$A' = \{2, 4, 9, 13, 15, 17\}$$
$$B' = \{2, 6, 15, 17\}$$
$$A \cup B = \{1, 4, 6, 9, 13, 14\}$$

Solución

$$(A \cup B)' = A' \cap B' = \{2, 15, 17\}$$
$$A' \cap B' = (A \cup B)' = U - (A \cup B) = \{2, 15, 17\}$$

luego

$$U = \{1, 2, 4, 6, 9, 13, 14, 15, 17\}$$
$$A = U - A' = \{1, 6, 14\}$$
$$B = U - B' = \{1, 4, 9, 13, 14\}$$

6. Determinar U y sus tres subconjuntos A, B y C sabiendo que

$$(A \cup B \cup C)' = \{1, 8, s\}$$
$$A \cap C = \{5\}$$
$$A \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6, m, r\}$$
$$B \cap C = \phi$$
$$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 7, 9\}$$
$$B' = \{1, 2, 5, 6, 8, m, r, s\}$$

Solución

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C) = A \cup \phi = A$$
$$\{2, 3, 4, 5, 7, 9\} \cap \{2, 3, 4, 5, 6, m, r\} = \{2, 3, 4, 5\} = A$$

$$\text{Si } A = \{2, 3, 4, 5\} \text{ entonces } \begin{cases} A \cap C = \{5\} \\ A \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6, m, r\} \end{cases}$$

resultando $C = \{5, 6, m, r\}$

Como $(A \cup B) \cup (A \cup C) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, m, r\} = A \cup B \cup C$

$$(A \cup B \cup C)' = U - (A \cup B \cup C) = \{1, 8, s\}$$

por lo tanto

$U = (A \cup B \cup C) \cup (A \cup B \cup C)' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, m, r, s\}$

y $B = U - B' = \{3, 4, 7, 9\}$

7. Determinar U y sus tres subconjuntos A, B y C sabiendo que

$(A \cup B \cup C)' = \{1, 12, q\}$	$A \cup C = \{2, 5, 7, 8, 11, 14\}$
$A \cap B = \{2, 8\}$	$B \cap C = \phi$
$A \cup B = \{2, 5, 7, 8, 10, 16, p\}$	$C' = \{1, 2, 8, 10, 12, 16, p, q\}$

Solución

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C) = A \cup \phi = A = \{2, 5, 7, 8\}$$

De $A \cap B = \{2, 8\}$, $A \cup B = \{2, 5, 7, 8, 10, 16, p\}$

y $A = \{2, 5, 7, 8\}$ resulta $B = \{2, 8, 10, 16, p\}$

$(A \cup B) \cup (A \cup C) = A \cup B \cup C = \{2, 5, 7, 8, 10, 11, 14, 16, p\}$

$(A \cup B \cup C)' = U - (A \cup B \cup C)$ de donde

$U = \{1, 2, 5, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 16, p, q\}$

$$C = U - C' = \{5, 7, 11, 14\}$$

8. Siendo A, B y C subconjuntos de U, simplificar la siguiente expresión

$$[(A \cap B') \cap C] \cup [(A \cap B') \cap C'] \cup (A' \cap B')$$

Solución

$[(A \cap B') \cap C] \cup [(A \cap B') \cap C'] \cup (A' \cap B') =$

$= [(A \cap B') \cap (C \cup C')] \cup (A' \cap B') = [(A \cap B') \cap U] \cup (A' \cap B') =$

$= (A \cap B') \cup (A' \cap B') = (A \cup A') \cap B' = U \cap B' = B'$

9. Siendo A, B y C subconjuntos de U, simplificar la siguiente expresión

$$\{[(A' \cup B) \cup C] \cap A'\} \cap \{[(B \cup C) \cap (B' \cap C')] \cup A\}$$

Solución

$$\{[(A' \cup B) \cup C] \cap A'\} \cap \{[(B \cup C) \cap (B' \cap C')] \cup A\} =$$
$$= \{[(A' \cup (B \cup C)] \cap A'\} \cap \{[(B \cup C) \cap (B \cup C)'] \cup A\} =$$
$$= A' \cap [\phi \cup A] = A' \cap A = \phi$$

10. Siendo A, B y C subconjuntos de U, simplificar la siguiente expresión

$$[(A \cap B) \cap C] \cup [(A \cap B) \cap C'] \cup (A' \cap B)$$

Solución

Aplicando la propiedad distributiva de $\cap$ respecto $\cup$ resulta B

11. Siendo A, B y C subconjuntos de U, simplificar la siguiente expresión

$$\{[A \cap (B' \cup C)] \cup (A' \cap C)\} \cap [B \cap (A \cup C)']$$

Solución

Aplicando las propiedades distributiva de $\cap$ respecto $\cup$, la asociativa y conmutativa de la unión en { }; la asociativa y conmutativa de la intersección en lo que resulta, queda ϕ.

12. Simplificar la expresión siguiente utilizando las propiedades de la teoría de conjuntos

$$(A' \cap B') \cap \{[(A \cup B) \cap (A \cup B')] \cup [(A \cap B) \cup (A' \cap B)]\}$$

Solución

$$(A' \cap B') \cap \{[(A \cup B) \cap (A \cup B')] \cup [(A \cap B) \cup (A' \cap B)]\} =$$
$$= (A' \cap B') \cap \{[A \cup (B \cap B')] \cup [(A \cup A') \cap B]\} =$$

$$= (A' \cap B') \cap \{[A \cup \phi] \cup [U \cap B]\} =$$

$$= (A' \cap B') \cap (A \cup B) = [(A' \cap B') \cap A] \cup [(A' \cap B') \cap B] =$$

$$= [(A' \cap A) \cap B'] \cup [A' \cap (B' \cap B)] = (\phi \cap B') \cup (A' \cap \phi) = \phi$$

13. Simplificar la expresión siguiente utilizando las propiedades de la teoría de conjuntos

$$(A \cup B) \cap (A \cup B') \cap (A' \cup B)$$

Solución

$$(A \cup B) \cap (A \cup B') \cap (A' \cup B) = [(A \cup B) \cap (A \cup B')] \cap (A' \cup B) =$$

$$= [A \cup (B \cap B')] \cap (A' \cup B) = (A \cup \phi) \cap (A' \cup B) = A \cap (A' \cup B) =$$

$$= (A \cap A') \cup (A \cap B) = \phi \cup (A \cap B) = A \cap B$$

14. Siendo A y B subconjuntos de U, probar que los subconjuntos

$$A \cap B,\ A \cap B',\ A' \cap B \text{ y } A' \cap B'$$

constituyen una partición de U. Los subconjuntos A y B son distintos del vacío.

Solución

Es partición porque resulta:

1) $(A \cap B) \cup (A \cap B') \cup (A' \cap B) \cup (A' \cap B') = U$

2) $(A \cap B) \cap (A \cap B') = \phi \qquad (A \cap B') \cap (A' \cap B) = \phi$

$(A \cap B) \cap (A' \cap B) = \phi \qquad (A \cap B') \cap (A' \cap B') = \phi$

$(A \cap B) \cap (A' \cap B') = \phi \qquad (A' \cap B) \cap (A' \cap B') = \phi$

15. Si p es un número natural, designamos por

$$Cp = \{x \in N \mid x - p = \dot{5} \text{ y natural}\}$$

Determinar:

1) C_1, C_2, C_3, C_4 y C_5

2) ¿Es $\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}$ una partición de N?

Solución

1) $C_1 = \{x \in N \mid x - 1 = \dot{5} \text{ y natural}\} = \{1, 6, 11, 16, 21, 26, \ldots\}$

$C_2 = \{x \in N \mid x - 2 = \dot{5} \text{ y natural}\} = \{2, 7, 12, 17, 22, 27, \ldots\}$

$C_3 = \{x \in N \mid x - 3 = \dot{5} \text{ y natural}\} = \{3, 8, 13, 18, 23, 28, \ldots\}$

$C_4 = \{x \in N \mid x - 4 = \dot{5} \text{ y natural}\} = \{4, 9, 14, 19, 24, 29, \ldots\}$

$C_5 = \{x \in N \mid x - 5 = \dot{5} \text{ y natural}\} = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, \ldots\}$

2) Es una partición de N porque

a) $C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \cup C_5 = N$

b) $Ci \cap Cj = \phi$ para $i, j = 1, 2, 3, 4, 5$, e $i \neq j$

16. Demostrar que siendo A y B dos subconjuntos de U, se cumple

a) $(A - B)' = A' \cup B$

b) $(A - B) \cap (A \cap B) = \phi$

Solución

a) $(A - B)' = (A \cap B')' = A' \cup (B')' = A' \cup B$

b) $(A - B) \cap (A \cap B) = (A \cap B') \cap (A \cap B) =$

$= (A \cap A) \cap (B' \cap B) = \phi$

17. Demostrar que siendo A y B dos subconjuntos de U, se cumple

a) $A' - B' = B - A$

b) $A \cap (B - A) = \phi$

Solución

a) $A' - B' = A' \cap B = B \cap A' = B - A$

b) $A \cap (B - A) = A \cap (B \cap A') = (A \cap A') \cap B = \phi$

18. Demostrar que siendo A y B dos subconjuntos de U se cumple

$(A \cap B') \cup (A' \cap B) = (A' \cup B') \cap (A \cup B)$

Solución

$$(A \cap B') \cup (A' \cap B) = [(A \cap B') \cup A'] \cap [(A \cap B') \cup B\} =$$
$$= [(A \cup A') \cap (A' \cup B')] \cap [(A \cup B) \cap (B' \cup B)] =$$
$$= [U \cap (A' \cup B')] \cap [(A \cup B) \cap U] = (A' \cup B') \cap (A \cup B)$$

19. Demostrar que siendo A y B dos subconjuntos de U se cumple

$$B - (A \cap B) = B - A$$

Solución

$$B - (A \cap B) = B \cap (A \cap B)' = B \cap (A' \cup B') =$$
$$= (B \cap A') \cup (B \cap B') = B \cap A' = B - A$$

20. Demostrar que siendo A y B dos subconjuntos de U, se cumple

a) $(A - B) \cup (B \cap A) = A$

b) $A - (A - B) = A \cap B$

Solución

a) $(A - B) \cup (B \cap A) = (A \cap B') \cup (A \cap B) = A \cap (B' \cup B) = A$

b) $A - (A - B) = A \cap (A - B)' = A \cap (A \cap B')' = A \cap (A' \cup B) =$
$$= (A \cap A') \cup (A \cap B) = \phi \cup (A \cap B) = A \cap B$$

21. Demostrar que siendo A, B y C tres subconjuntos de U, se cumple

$$A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$$

Solución

$$A - (B - C) = A - (B \cap C') = A \cap [B \cap C']' = A \cap (B' \cup C) =$$
$$= (A \cap B') \cup (A \cap C) = (A - B) \cap (A \cap C)$$

22. Demostrar que siendo A, B y C tres subconjuntos de U, se cumple

$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$$

Solución

$$A - (B \cap C) = A \cap (B \cap C)' = A \cap (B' \cup C') =$$
$$= (A \cap B') \cup (A \cap C') = (A - B) \cup (A - C)$$

23. Demostrar que siendo A, B y C tres subconjuntos de U se cumple

$$(A - B) - C = A - (B \cup C)$$

Solución

$$(A - B) - C = (A - B) \cap C' = (A \cap B') \cap C' = A \cap (B' \cap C') =$$
$$= A \cap (B \cup C)' = A - (B \cup C)$$

24. Demostrar que siendo A, B y C tres subconjuntos de U se cumple

$$A \cup (B - C) = (A \cup B) - (C - A)$$

Solución

$$A \cup (B - C) = A \cup (B \cap C') = (A \cup B) \cap (A \cup C') =$$
$$= (A \cup B) \cap (A' \cap C)' = (A \cup B) - (A' \cap C) =$$
$$= (A \cup B) - (C - A)$$

25. Siendo A, B y C tres conjuntos, demostrar la siguiente igualdad aplicando la propiedad antisimétrica

$$(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$$

Solución

I) $(A \cup B) - C \subset (A - C) \cup (B - C)$

$$\forall\, x \in (A \cup B) - C \Rightarrow \begin{cases} x \in A \cup B \\ \quad y \\ x \notin C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \text{ o } x \in B \\ \quad y \\ x \notin C \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in A \text{ y } x \notin C \\ \quad\text{o} \\ x \in B \text{ y } x \notin C \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in A - C \\ \quad\text{o} \\ x \in B - C \end{array} \right. \Rightarrow x \in (A - C) \cup (B - C)$$

2) $(A - C) \cup (B - C) \subset (A \cup B) - C$

$$\forall\, x \in (A - C) \cup (B - C) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in A - C \\ \quad\text{o} \\ x \in B - C \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in A \text{ y } x \notin C \\ \quad\text{o} \\ x \in B \text{ y } x \notin C \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in A \text{ o } x \in B \\ \quad\text{y} \\ x \notin C \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in A \cup B \\ \quad\text{y} \\ x \notin C \end{array} \right. \Rightarrow x \in (A \cup B) - C$$

Como

$$(A \cup B) - C \subset (A - C) \cup (B - C)$$

y $(A - C) \cup (B - C) \subset (A \cup B) - C$

por la propiedad antisimétrica de la inclusión

$$(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$$

26. Siendo A, B y C tres conjuntos, demostrar la siguiente igualdad aplicando la propiedad antisimétrica de la inclusión

$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$$

Solución

Al igual que en el caso anterior se demuestra

1) $A \cap (B - C) \subset (A \cap B) - (A \cap C)$

2) $(A \cap B) - (A \cap C) \subset A \cap (B - C)$

y como consecuencia

$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$$

27. Siendo A, B y C tres conjuntos, demostrar la siguiente igualdad aplicando la propiedad antisimétrica de la inclusión

$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$$

Solución

$$1)\ A - (B \cup C) \subset (A - B) \cap (A - C)$$

$$\forall\, x \in A - (B \cup C) \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ \text{y} \\ x \notin B \cup C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ \text{y} \\ x \notin B \text{ y } x \notin C \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in A \text{ y } x \notin B \\ \text{y} \\ x \in A \text{ y } x \notin C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A - B \\ \text{y} \\ x \in A - C \end{cases} \Rightarrow x \in (A - B) \cap (A - C)$$

$$2)\ (A - B) \cap (A - C) \subset A - (B \cup C)$$

$$\forall\, x \in (A - B) \cap (A - C) \Rightarrow \begin{cases} x \in A - B \\ \text{y} \\ x \in A - C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \text{ y } x \notin B \\ \text{y} \\ x \in A \text{ y } x \notin C \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ \text{y} \\ x \notin B \text{ y } x \notin C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ \text{y} \\ x \notin B \cup C \end{cases} \Rightarrow x \in A - (B \cup C)$$

Como $A - (B \cup C) \subset (A - B) \cap (A - C)$ y

$$(A - B) \cap (A - C) \subset A - (B \cup C)$$

por la propiedad antisimétrica de la inclusión

$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$$

28. Siendo A, B y C tres conjuntos, demostrar la siguiente igualdad utilizando la propiedad antisimétrica

$$(A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A) = A \cup B$$

Solución

Al igual que en casos anteriores se demuestra

1) $(A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A) \subset A \cup B$

2) $A \cup B \subset (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$

y como consecuencia

$$(A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A) = A \cup B$$

29. De los 100 niños de un colegio hay 32 que estudian inglés, 48 que estudian francés y 20 que estudian, ambos idiomas. Se pide:

1) ¿Cuántos niños estudian francés o inglés?
2) ¿Cuántos niños no estudian ningún idioma?
3) ¿Cuántos estudian solamente francés?

Solución

$$n(F) = 48, \; n(I) = 32, \; n(F \cap I) = 20$$

1) $n(F \cup I) = n(F) + n(I) - n(F \cap I) = 48 + 32 - 20 = 60$

2) $n(\overline{F \cup I}) = 100 - n(F \cup I) = 100 - 60 = 40$

3) Solamente francés $= n(F) - n(F \cap I) = 48 - 20 = 28$

30. ¿Puede creerse a un investigador que informa que de cada 1.000 habitantes de una gran ciudad 815 son trabajadores; 723 son hombres; con carrera universitaria 145; hombres y trabajadores son 520; hombres con carrera universitaria 100; trabajadores con carrera universitaria 75; hombres con carrera universitaria y trabajadores 10?

Solución

Llamamos A = hombres
B = trabajadores
C = con carrera universitaria

Se tiene: $n(A) = 723$ $\quad n(A \cap B) = 520$ $\quad n(A \cap B \cap C) = 10$
$n(B) = 815$ $\quad n(B \cap C) = 75$
$n(C) = 145$ $\quad n(A \cap C) = 100$

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) -$$
$$- n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) = 723 + 815 + 145 - 520 - 75 - 100 + 10 =$$
$$= 998$$

El resultado es inferior al número de personas, por lo tanto no debe creerse al investigador.

31. En una encuesta hecha sobre 100 personas se ha comprobado lo siguiente

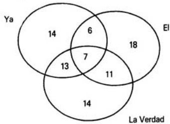
40 leen el periódico «Ya»
42 leen el periódico «El País»
45 leen el periódico «La Verdad»
13 leen el periódico «Ya» y «El País»
20 leen el periódico «Ya» y «La Verdad»
18 leen el periódico «El País» y «La Verdad»
7 leen los tres periódicos

Se pide:

a) ¿Cuántas personas no leen ninguno de los tres periódicos?
b) ¿Cuántas personas leen únicamente «El País»?
c) ¿Cuántas personas leen únicamente un solo periódico?

Solución

Representando gráficamente



a) Las que leen algún periódico de los tres son 83, luego los que no leen ningún periódico son $100 - 83 = 17$.

b) Los que leen únicamente «El País» son 18.

c) Los que no leen nada más que un periódico son

$$14 + 18 + 14 = 46$$

32. En una reunión hay 30 personas de las cuales 16 fuman, 16 beben y 19 comen; 7 fuman y beben; 9 beben y comen; 8 fuman y comen. ¿Cuántas personas que fuman también beben o comen pero no ambas cosas a la vez?

Solución

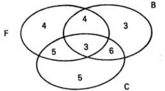
$n(F) = 16 \quad n(F \cap B) = 7 \quad n(F \cup B \cup C) = 30$

$n(B) = 16 \quad n(B \cap C) = 9$

$n(C) = 19 \quad n(F \cap C) = 8$

$$30 = 16 + 16 + 19 - 7 - 9 - 8 + n(F \cap B \cap C) \Rightarrow n(F \cap B \cap C) = 3$$

Gráficamente



Se pide:

$$n[(F \cap B) \cup (F \cap C)] - n(F \cap B \cap C) = (7 + 8 - 3) - 3 = 9$$

33. En un grupo de 200 alumnos de 1.º de Magisterio, hay 70 alumnos que van a clase de Matemáticas, 120 que van a clase de Pedagogía y 90 que van a clase de Lengua, 50 van a clase de Matemáticas y Pedagogía, 30 a Matemáticas y Lengua, 40 a Pedagogía y Lengua, por último 20 van a clase de las tres asignaturas.

Calcular:

1) ¿Cuántos alumnos van a Matemáticas o Pedagogía?
2) ¿Cuántos alumnos no van a ninguna de las 3 clases?
3) ¿Cuántos alumnos van a Matemáticas o Lengua?
4) ¿Cuántos alumnos van a alguna de las tres clases?
5) ¿Cuántos alumnos van a Pedagogía o Lengua?

Solución

1) $n(M \cup P) = 140$
2) $n(\overline{M \cup P \cup L}) = 200 - 180 = 20$
3) $n(M \cup L) = 130$
4) $n(M \cup P \cup L) = 180$
5) $n(P \cup L) = 170$

34. Determinar el número de elementos que no pertenecen a ninguno de los conjuntos A, B y C sabiendo que hay n elementos en total, de los cuales la mitad pertenecen a A, la tercera parte a B y la cuarta parte a C, la sexta parte pertenece a cada par de ellos y la décima parte a los tres.

Solución

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B)$$

$$- n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) = \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \frac{n}{4} - \frac{n}{6} - \frac{n}{6}$$

$$- \frac{n}{6} + \frac{n}{10} = \frac{41n}{60}$$

El número de elementos que no pertenece a ninguno de los conjuntos A, B y C será

$$n(\overline{A \cup B \cup C}) = n - n(A \cup B \cup C) = n - \frac{41}{60}n = \frac{19}{60}n$$

35. A una ponencia de un congreso internacional asistieron 25 personas; entre ellas había 20 militares, 12 universitarios, 17 españoles, 8 militares universitarios, 12 militares españoles y 11 universitarios españoles. Se pide:

1) ¿Cuántos españoles eran militares y universitarios a la vez?

2) ¿Cuántos españoles eran militares o universitarios pero no ambas cosas a la vez?

Solución

1) Españoles militares y universitarios eran 7

2) Españoles militares o universitarios, pero no ambas cosas a la vez eran 9.

36. De los 250 alumnos matriculados en primer curso de una Facultad de Ciencias, 128 han aprobado Matemáticas, 105 Biología y 165 Geología, 68 han aprobado Matemáticas y Biología, 75 Matemáticas y Geología, 45 Biología y Geología, siendo 30 los que han aprobado las tres asignaturas.

Se pide:

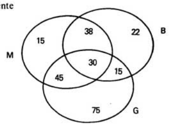
1) Número de alumnos que no han aprobado ninguna asignatura.

2) Número de alumnos que han suspendido dos asignaturas.

3) Número de alumnos que han suspendido sólo una asignatura.

Solución

Gráficamente



1) $250 - (75 + 15 + 22 + 15 + 38 + 30 + 45) = 10$

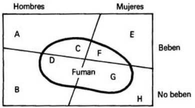
2) Han aprobado sólo una: $15 + 22 + 75 = 112$

3) Han aprobado dos asignaturas: $38 + 45 + 15 = 98$

37. En una reunión hay más hombres que mujeres, más mujeres que beben que hombres que fuman, más mujeres que fuman y no beben que hombres que no fuman ni beben. Demostrar que hay menos mujeres que no beben ni fuman que hombres que beben y no fuman.

Solución

Gráficamente



Siguiendo el enunciado, se tiene

$$n(A) + n(B) + n(C) + n(D) > n(E) + n(F) + n(G) + n(H)$$

$$n(E) + n(F) > n(C) + n(D)$$

$$n(G) > n(B)$$

sumando m. a m.

$$n(A) + n(B) + n(C) + n(D) + n(E) + n(F) + n(G) > n(E) + n(F) + n(G) + n(H) + n(C) + n(D) + n(B)$$

simplificando, resulta

$$n(A) > n(H)$$

Hay por tanto más hombres que beben y no fuman que mujeres que no beben y fuman.

38. Siendo A, B, C y D cuatro subconjuntos, **demostrar que**

$$n(A \cup B \cup C \cup D) = n(A) + n(B) + n(C) + n(D) - n(A \cap B) -$$
$$- n(A \cap C) - n(A \cap D) - n(B \cap C) - n(B \cap D) - n(C \cap D) +$$
$$+ n(A \cap B \cap C) + n(A \cap B \cap D) + n(B \cap C \cap D) + n(A \cap C \cap D) -$$
$$- n(A \cap B \cap C \cap D)$$

Solución

Aplicando el cardinal de $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ a $n[(A \cup B) \cup (C \cup D)]$ y operando, se obtiene la expresión pedida.

39. En el conjunto formado por todos los números naturales menores que 1.000, decir cuántos hay que no son múltiples ni de 3, ni de 5, ni de 7.

Solución

Llamamos

$$A = \{x \mid x = \dot{3}, 1 \leq x < 1.000\}$$
$$B = \{x \mid x = \dot{5}, 1 \leq x < 1.000\}$$
$$C = \{x \mid x = \dot{7}, 1 \leq x < 1.000\}$$

$$A \cap B = \{x \mid x = \dot{3} \text{ y } x = \dot{5}, 1 \leq x < 1.000\} = \{x \mid x = \dot{15}, 1 \leq x < 1.000\}$$
$$A \cap C = \{x \mid x = \dot{3} \text{ y } x = \dot{7}, 1 \leq x < 1.000\} = \{x \mid x = \dot{21}, 1 \leq x < 1.000\}$$
$$B \cap C = \{x \mid x = \dot{5} \text{ y } x = \dot{7}, 1 \leq x < 1.000\} = \{x \mid x = \dot{35}, 1 \leq x < 1.000\}$$
$$A \cap B \cap C = \{x \mid x = \dot{3}, x = \dot{5} \text{ y } x = \dot{7}, 1 \leq x < 1.000\} =$$
$$= \{x \mid x = \dot{105}, 1 \leq x < 1.000\}$$

Para $x \mid 1 \leq x < 1.000$

$$n(A) = \frac{999}{3} = 333, \text{ pues 999 es el último múltiplo de 3.}$$

$$n(B) = \frac{995}{5} = 199, \text{ pues 995 es el último múltiplo de 5.}$$

$$n(C) = \frac{994}{7} = 142, \text{ pues 994 es el último múltiplo de 7.}$$

$$n(A \cap B) = \frac{990}{15} = 66, \text{ pues 990 es el último múltiplo de 15.}$$

$$n(A \cap C) = \frac{987}{21} = 47, \text{ pues 987 es el último múltiplo de 21.}$$

$$n(B \cap C) = \frac{980}{35} = 28, \text{ pues 980 es el último múltiplo de 35.}$$

$$n(A \cap B \cap C) = \frac{945}{105} = 9, \text{ pues 945 es el último múltiplo de 105.}$$

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) -$$
$$- n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C) = 333 + 199 + 142 - 66 - 47 - 28 + 9 = 542$$

$$n(\overline{A \cup B \cup C}) = 999 - n(A \cup B \cup C) = 999 - 542 = 457$$

40. Dado el conjunto universal U y siendo A y B dos subconjuntos de U y A' y B' los complementarios de A y B, se pide completar el siguiente cuadro:

¿Es cierta esta igualdad?	Si $A \cap B = \phi$	Si $B \subset A$	$A \cap B \neq \phi$ $A \not\subset B$ y $B \not\subset A$
$n(A \cap B') = n(A) - n(B)$			
$n(A \cap B') + n(A \cup B) = 2n(A) + n(B)$			
$n(A \cap B') + n(A \cap B) = n(A)$			
$n(A \cap B) + n(A' \cup B') = n(A \cup B)$			
$n(A \cup B) + n(A' \cap B') = n(U)$			
$n(A' \cup B) + n(A' \cap B) = n(A \cup B) - n(A \cap B)$			

Solución

NO	SI	NO
SI	NO	NO
SI	SI	SI
NO	NO	NO
SI	SI	SI
NO	NO	NO

2. Relaciones

CONCEPTOS TEORICOS

Producto cartesiano: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$

Propiedades: $A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$

$A \times B \neq B \times A$

$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

Relación de equivalencia

— Propiedad reflexiva: $\forall a \in A \quad a R a$

— Propiedad simétrica: $a, b \in A \quad a R b \Rightarrow b R a$

— Propiedad transitiva: $a, b, c \in A \quad$ Si $a R b$ y $b R c \Rightarrow a R c$

Relación de orden

— Propiedad reflexiva: $\forall a \in A \quad a R a$

— Propiedad antisimétrica: $a, b \in A \quad$ Si $a R b$ y $b R a \Rightarrow a = b$

— Propiedad transitiva: $a, b, c \in A \quad$ Si $a R b$ y $b R c \Rightarrow a R c$

Relación de orden total

— Propiedad reflexiva: $\forall a \in A \quad a R a$

— Propiedad antisimétrica: $a, b \in A \quad$ Si $a R b$ y $b R a \Rightarrow a = b$

— Propiedad transitiva: $a, b, c \in A \quad$ Si $a R b$ y $b R c \Rightarrow a R c$

— Propiedad conexa: $\forall a, b \in A \quad a R b \quad$ o $\quad b R a$

PROBLEMAS

1. Demostrar que

$$\overline{A \times B} = (\bar{A} \times \bar{B}) \cup (\bar{A} \times B) \cup (A \times \bar{B})$$

Solución

Demostramos esta igualdad aplicando la propiedad antisimétrica de la inclusión, para ello vemos

1) $\overline{A \times B} \subset (\bar{A} \times \bar{B}) \cup (\bar{A} \times B) \cup (A \times \bar{B})$

$$\forall (x, y) \in \overline{A \times B} \Rightarrow (x, y) \notin A \times B \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x \notin A,\ y \in B \\ \text{o} \\ x \in A,\ y \notin B \\ \text{o} \\ x \notin A,\ y \notin B \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x \in \bar{A},\ y \in B \\ \text{o} \\ x \in A,\ y \in \bar{B} \\ \text{o} \\ x \in \bar{A},\ y \in \bar{B} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} (x, y) \in \bar{A} \times B \\ \text{o} \\ (x, y) \in A \times \bar{B} \\ \text{o} \\ (x, y) \in \bar{A} \times \bar{B} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (x, y) \in (\bar{A} \times B) \cup (A \times \bar{B}) \cup (\bar{A} \times \bar{B})$$

2) $(\bar{A} \times \bar{B}) \cup (\bar{A} \times B) \cup (A \times \bar{B}) \subset \overline{(A \times B)}$

$$\forall (x, y) \in (\bar{A} \times \bar{B}) \cup (\bar{A} \times B) \cup (A \times \bar{B}) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} (x, y) \in \bar{A} \times \bar{B} \\ \text{o} \\ (x, y) \in \bar{A} \times B \\ \text{o} \\ (x, y) \in A \times \bar{B} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x \in \bar{A},\ y \in \bar{B} \\ \text{o} \\ x \in \bar{A},\ y \in B \\ \text{o} \\ x \in A,\ y \in \bar{B} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x \notin A,\ y \notin B \\ \text{o} \\ x \notin A,\ y \in B \\ \text{o} \\ x \in A,\ y \notin B \end{array} \right. \Rightarrow (x, y) \notin A \times B$$

$$\Rightarrow (x, y) \in \overline{A \times B}$$

Por la doble inclusión podemos poner que

$$\overline{A \times B} = (\overline{A} \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times B) \cup (A \times \overline{B})$$

2. Demostrar

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

Solución

Por la propiedad antisimétrica de la inclusión demostramos

1) $A \times (B \cup C) \subset (A \times B) \cup (A \times C)$

$$\forall (x, y) \in A \times (B \cup C) \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ y \in B \cup C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ y \in B \quad \text{o} \quad y \in C \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in A,\ y \in B \\ \text{o} \\ x \in A,\ y \in C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x, y) \in A \times B \\ \text{o} \\ (x, y) \in A \times C \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$$

2) $(A \times B) \cup (A \times C) \subset A \times (B \cup C)$

$$\forall (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C) \Rightarrow \begin{cases} (x, y) \in A \times B \\ \text{o} \\ (x, y) \in A \times C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A,\ y \in B \\ \text{o} \\ x \in A,\ y \in C \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ y \in B \text{ o } y \in C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ y \in B \cup C \end{cases} \Rightarrow (x, y) \in A \times (B \cup C)$$

Por la doble inclusión podemos poner

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

3. Demostrar

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

Solución

Aplicando el mismo procedimiento que en los casos anteriores, se comprueba la propiedad distributiva del producto cartesiano respecto a la intersección.

4. Demostrar

$$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$$

Solución

Para demostrar la igualdad, procedemos así

$$\mathit{1)}\ A \times (B - C) \subset (A \times B) - (A \times C)$$

$$\forall\,(x, y) \in A \times (B - C) \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ y \in B - C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ y \in B,\ y \notin C \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in A,\ y \in B \\ x \in A,\ y \notin C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x, y) \in A \times B \\ (x, y) \notin A \times C \end{cases} \Rightarrow$$

$$(x, y) \in (A \times B) - (A \times C)$$

$$\mathit{2)}\ (A \times B) - (A \times C) \subset A \times (B - C)$$

$$\forall\,(x, y) \in (A \times B) - (A \times C) \Rightarrow \begin{cases} (x, y) \in A \times B \\ (x, y) \notin A \times C \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in A,\ y \in B \\ \\ x \in A,\ y \notin C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ \\ y \in B,\ y \notin C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ \\ y \in B - C \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x, y) \in A \times (B - C)$$

De la doble inclusión

$$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$$

5. Demostrar

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

Solución

Se demuestra como en casos anteriores aplicando la propiedad antisimétrica de la inclusión.

6. Demostrar

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \times D) \cap (C \times B)$$

Solución

Demostramos

1) $(A \times B) \cap (C \times D) \subset (A \times D) \cap (C \times B)$

$$\forall (x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D) \Rightarrow \begin{cases} (x, y) \in A \times B \\ y \\ (x, y) \in C \times D \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in A,\ y \in B \\ y \\ x \in C,\ y \in D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A,\ y \in D \\ y \\ x \in C,\ y \in B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x, y) \in A \times D \\ y \\ (x, y) \in C \times B \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x, y) \in (A \times D) \cap (C \times B)$$

2) $(A \times D) \cap (C \times B) \subset (A \times B) \cap (C \times D)$

$$\forall\ (x, y) \in (A \times D) \cap (C \times B) \Rightarrow \begin{cases} (x, y) \in A \times D \\ \quad y \\ (x, y) \in C \times B \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in A,\ y \in D \\ \\ x \in C,\ y \in B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A,\ y \in B \\ \quad y \\ x \in C,\ y \in D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x, y) \in A \times B \\ \quad y \\ (x, y) \in C \times D \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D)$$

De la doble inclusión

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \times D) \cap (C \times B)$$

7. Demostrar

$$(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$$

Solución

Como en casos anteriores se demuestra por la propiedad antisimétrica de la inclusión.

8. Del conjunto $C \times C$ se conocen los elementos (a, b) y (c, d) y se sabe que tiene 16 elementos. Hallar los restantes elementos.

Solución

El conjunto C estará formado por

$$C = \{a, b, c, d\} \quad y$$

$$C \times C = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, a), (b, b), (b, c), (b, d), (c, a), (c, b), (c, c), (c, d), (d, a), (d, b), (d, c), (d, d)\}$$

9. En el conjunto $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ se define la relación

$$\forall\ a, b \in A \qquad a\ R\ b \Leftrightarrow 3a - b \geq 2$$

Se pide:

1) Obtener su grafo.
2) Su diagrama cartesiano y sagital.
3) ¿Qué propiedades cumple R?

Solución

1) Comprobamos los elementos que están relacionados por R siguiendo el siguiente procedimiento

$(-2)\ R\ (-2) \Leftrightarrow 3\ (-2) - (-2) = -4 \ngeq 2 \Rightarrow (-2, -2) \notin R\ (A)$

$(-2)\ R\ (-1) \Leftrightarrow 3\ (-2) - (-1) = -5 \ngeq 2 \Rightarrow (-2, -1) \notin R\ (A)$

$(-2)\ R\ (0) \Leftrightarrow 3\ (-2) - (0) = -6 \ngeq 2 \Rightarrow (-2, 0) \notin R\ (A)$

$(-2)\ R\ (1) \Leftrightarrow 3\ (-2) - 1 = -7 \ngeq 2 \Rightarrow (-2, 1) \notin R\ (A)$

$(-2)\ R\ (2) \Leftrightarrow 3\ (-2) - 2 = -8 \ngeq 2 \Rightarrow (-2, 2) \notin R\ (A)$

Haciendo lo mismo con todos los elementos se encuentran los pares de elementos relacionados por R, resultando

$$R\ (A) = \{(0, -2), (1, -2), (1, -1), (1, 0), (1, 1), (2, -2), (2, -1), (2, 0), (2, 1), (2, 2)\}$$

2) Diagrama cartesiano

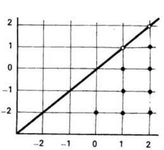
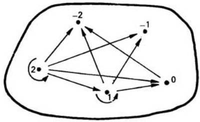


Diagrama sagital



3) Las propiedades son

— No es reflexiva
— No es simétrica
— Es antisimétrica
— Es transitiva

10. En el conjunto $M = \{-3, -1, 0, 2, 4\}$ se define la relación

$$\forall\ a, b \in M \qquad a\ R\ b \Leftrightarrow a^2 + b \geq 3$$

Se pide:

1) Obtener su grafo.
2) ¿Qué propiedades tiene la relación R?

Solución

1) Haciendo como en el caso anterior, se obtiene el grafo.

$$R(M) = \{(-3, -3), (-3, -1), (-3, 0), (-3, 2), (-3, 4), (-1, 2), (-1, 4), (0, 4), (2, -1), (2, 0), (2, 2), (2, 4), (4, -3), (4, -1), (4, 0), (4, 2), (4, 4)\}$$

2) No tiene ninguna propiedad.

11. En el conjunto $A = \{-5, -1, 0, 2, 3\}$ se establece la relación.

$$\forall\, a, b \in A \qquad a\,R\,b \Leftrightarrow a + b > 0$$

Se pide:

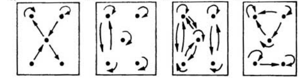
1) Obtener su grafo.
2) ¿Qué propiedades tiene la relación R?

Solución

1) $R(A) = \{(-1, 2), (-1, 3), (0, 2), (0, 3), (2, -1), (2, 0), (2, 2),$
$(2, 3), (3, -1), (3, 0), (3, 2), (3, 3)\}$

2) Sólo tiene la propiedad simétrica.

12. Consideremos las siguientes relaciones definidas por sus diagramas sagitales.



Se pide:

1) ¿Qué propiedades tiene cada uno?
2) ¿Originan alguna relación conocida?

Solución

1) a) Antisimétrica.
b) Reflexiva y simétrica.
c) Reflexiva, simétrica y transitiva.
d) Reflexiva, antisimétrica y transitiva.

2) c) Relación de equivalencia.
d) Relación de orden.

13. En el conjunto N de los números naturales se define la relación

$$a\ R\ b \Leftrightarrow \text{m. c. d. } (a, b) = 1$$

¿Qué propiedades tiene?

Solución

1) Propiedad reflexiva: a R a

No la verifica puesto que:

$$\text{m. c. d. } (a, a) = a$$

2) Propiedad simétrica: $a\ R\ b \Rightarrow b\ R\ a$

Sí la verifica puesto que:

$$\text{Si m. c. d. } (a, b) = 1 \Rightarrow \text{m. c. d. } (b, a) = 1$$

3) Propiedad transitiva: a R b y b R c $\Rightarrow$ a R c

No la verifica puesto que:

Si m. c. d. (a, b) = 1 y m. c. d. (b, c) = 1 $\not\Rightarrow$ m. c. d. (a, c) = 1

Así si tomamos 6, 7, 9 $\in$ N

m. c. d. (6, 7) = 1, m. c. d. (7, 9) = 1 y m. c. d. (6, 9) = 3

4) Propiedad conexa: $\forall$ a, b $\in$ N, a R b o b R a.

No la cumple puesto que dados dos números naturales cualesquiera no tienen por qué ser primos entre sí.

14. Hallar todos los valores posibles de n para los cuales la relación:

$$\forall a, b \in N \qquad a\ R\ b \Leftrightarrow a + b = \dot{n}$$

es de equivalencia

Solución

Para n = 1 y n = 2 la relación R es de equivalencia.

15. En el conjunto Z de los números enteros se establece la relación R dada así:

$$a\ R\ b \Leftrightarrow a^2 - b^2 = b - a$$

Se pide:

1) Demostrar que es de equivalencia.
2) Obtener el conjunto cociente.

Solución

1) Es de equivalencia por cumplir

— Propiedad reflexiva: a R a ya que $a^2 - a^2 = a - a$

— Propiedad simétrica: Si $a R b \Rightarrow b R a$

$$a^2 - b^2 = b - a \Rightarrow b^2 - a^2 = a - b$$

— Propiedad transitiva:

$$\text{Si } a R b \Rightarrow a^2 - b^2 = b - a$$

$$\text{Si } b R c \Rightarrow b^2 - c^2 = c - b$$

Sumando m. a m.

$$a^2 - c^2 = c - a \Rightarrow a R c$$

2) Para obtener el conjunto cociente

$$a R b \Leftrightarrow a^2 - b^2 = b - a \Rightarrow (a + b)(a - b) = -(a - b) \text{ para } a \neq b$$

$$a + b = -1 \quad \text{luego} \quad b = -(a + 1)$$

Las clases son:

$$(0) = \{0, -1\}$$

$$(1) = \{1, -2\}$$

$$(2) = \{2, -3\}$$

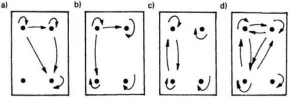
$$(3) = \{3, -4\}$$

....

El conjunto cociente es:

$$Z/R = \{(0), (1), (2), (3), \dots\}$$

16. Consideremos las siguientes relaciones definidas por sus diagramas.



Se pide:

1) ¿Qué propiedades tiene cada una?
2) ¿Origina alguna relación conocida?

Solución

1) a) Propiedades antisimétrica y transitiva
b) Propiedades reflexiva y antisimétrica
c) Propiedades reflexiva y simétrica
d) Propiedades reflexiva, simétrica y transitiva

2) En el diagrama d) se origina una relación de equivalencia.

17. En el conjunto N se define la relación

$$a \, R \, b \Leftrightarrow a + b = \dot{2}$$

Se pide:

1) ¿Es de equivalencia?
2) Hallar las clases de equivalencia
3) Hallar el conjunto cociente

Solución

1) Es de equivalencia por cumplir las propiedades

— Reflexiva: $a \, R \, a \Rightarrow a + a = 2a = \dot{2}$
— Simétrica: $a \, R \, b \Rightarrow b \, R \, a$

$$\text{Si } a + b = \dot{2} \Rightarrow b + a = \dot{2}$$

— Transitiva: $a\,R\,b$ y $b\,R\,c \Rightarrow a\,R\,c$

$$\text{Si } a\,R\,b \Rightarrow a + b = \dot{2}$$
$$\text{Si } b\,R\,c \Rightarrow b + c = \dot{2}$$

Sumando m. a m.

$$a + 2b + c = \dot{2} \Rightarrow a + c = \dot{2} \Rightarrow a\,R\,c$$

2) Las clases de equivalencia son:

$$(1) = \{x \in N \mid x\,R\,1\} = \{x \in N \mid x + 1 = \dot{2}\} = \{x \in N \mid x = \dot{2} - 1\}$$

$$(2) = \{x \in N \mid x\,R\,2\} = \{x \in N \mid x + 2 = \dot{2}\} = \{x \in N \mid x = \dot{2} - 2 = \dot{2}\}$$

3) El conjunto cociente es:

$$N/R = \{(1), (2)\}$$

18. En el conjunto Z de los números enteros se define la siguiente relación binaria

$$a\,R\,b \Leftrightarrow a - b = \dot{5}$$

Se pide:

1) Comprobar si es una relación de equivalencia
2) Hallar las clases de equivalencia
3) Hallar el conjunto cociente

Solución

1) Es de equivalencia

2) Las clases de equivalencia son:

$$(0) = \{\ \ldots, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, \ldots\} = \dot{5}$$
$$(1) = \{\ldots, -14, -9, -4, 1, 6, 11, 16, \ldots\} = \dot{5} + 1$$
$$(2) = \{\ldots, -13, -8, -3, 2, 7, 12, 17, \ldots\} = \dot{5} + 2$$
$$(3) = \{\ldots, -12, -7, -2, 3, 8, 13, 18, \ldots\} = \dot{5} + 3$$
$$(4) = \{\ldots, -11, -6, -1, 4, 9, 14, 19, \ldots\} = \dot{5} + 4$$

3) El conjunto cociente es $Z/R = \{(0), (1), (2), (3), (4)\}$

19. En el cuerpo Q de los números racionales, se define la relación binaria.

$$x \ R \ y \Leftrightarrow \exists \ h \in Z \mid x = \frac{3y + h}{3}$$

Se pide:

1) Probar que R es de equivalencia.
2) Determinar el conjunto cociente.
3) Razonar si los elementos $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{5}$ pertenecen a la misma clase.

Solución

1) Es de equivalencia por cumplir las propiedades

— Reflexiva:

$$x \ R \ x \text{ pues } x = \frac{3x + 0}{3} = x$$

— Simétrica:

$$x \ R \ y \Leftrightarrow \exists \ h \in Z \mid x = \frac{3y + h}{3} \Leftrightarrow \exists \ - h \in Z \mid y = \frac{3x - h}{3} \Leftrightarrow y \ R \ x$$

— Transitiva:

$$\left.\begin{array}{l} x \ R \ y \Leftrightarrow \exists \ h \in Z \mid x = \dfrac{3y + h}{3} \\ y \ R \ z \Leftrightarrow \exists \ k \in Z \mid y = \dfrac{3z + k}{3} \end{array}\right\} \ x = \frac{3z + (k + h)}{3} \Rightarrow x \ R \ z$$

2) El conjunto cociente lo obtenemos así:

$$(x) = \{y \ R \ x \mid y = \frac{3x + h}{3} = x + \frac{h}{3}, h \in Z\}$$

3) Para que $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{5}$ estén relacionados perteneciendo a la misma clase ha de ocurrir

$$\frac{4}{5} - \frac{2}{3} = \frac{12 - 10}{15} = \frac{2}{15} = \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{2/5}{3} = \frac{h}{3}$$

$$\text{pero } \frac{2}{5} \notin Z$$

por lo tanto no pertenecen a la misma clase.

20. Dos puntos P (a, b) y Q (c, d) del plano están relacionados cuando

$$a + d = b + c$$

Estudiar si se trata de una relación de equivalencia y en caso afirmativo hallar las clases de equivalencia.

Solución

— Se trata de una relación de equivalencia.
— Clases de equivalencia: Siendo M (a, b) y P (x, y)

$$M\ R\ P \text{ si } (a, b)\ R\ (x, y) \Rightarrow y = x + b - a$$

Todos los puntos relacionados con M están en una recta paralela a la bisectriz del 1.º y 3.º cuadrante y de ordenada en el origen (b − a). Cada clase de equivalencia es una recta paralela a la bisectriz y = x, siendo el conjunto cociente el conjunto de dichas rectas paralelas.

21. En el conjunto N de los números naturales más el cero N U {0} se define la siguiente relación binaria.

$$a\ R\ b \Leftrightarrow \exists\ n \in N \cup \{0\} \mid a + n = b$$

Se pide:

1) Probar que es relación de orden.
2) ¿Es de orden total?

Solución

1) Cumple las propiedades

— Reflexiva: a R a pues a + n = a para n = 0
— Antisimétrica: Si a R b y b R a ⇒ a = b

$$\text{Que } a\ R\ b \Rightarrow \exists\ p \in N \cup \{0\} \mid a + p = b$$

$$\text{Que } b\ R\ a \Rightarrow \exists\ q \in N \cup \{0\} \mid b + q = a$$

Sumando m. a m.

$$a + p + b + q = a + b$$

de donde

$$p + q = 0 \Rightarrow p = q = 0 \Rightarrow a = b$$

—Transitiva: Si a R b y b R c $\Rightarrow$ a R c

$$\text{Si a R b} \Rightarrow \exists\, p \in N \cup \{0\} \mid a + p = b$$

$$\text{Si b R c} \Rightarrow \exists\, q \in N \cup \{0\} \mid b + q = c$$

Sumando m. a m.

$$a + p + b + q = b + c$$

$$a + (p + q) = c \Rightarrow a\,R\,c$$

Se trata de una relación de orden.

2) Es de orden total por cumplir la propiedad conexa:

$$\forall\, a, b \in N \cup \{0\} \qquad a\,R\,b \text{ ó } b\,R\,a$$

Es decir dados dos números a y b cualesquiera siempre existe otro número natural p tal que:

$$a + p = b \quad \text{ó} \quad b + p = a$$

22. En el conjunto Z de los números enteros se define la relación R:

$$x\,R\,y \Leftrightarrow |\,x - y\,| = \dot{3}$$

Se pide:

1) Probar que R es relación de equivalencia.
2) Hallar las clases de equivalencia.
3) Hallar el conjunto cociente.

Solución

1) Es de equivalencia.
2) Las clases de equivalencia son:

$$(0) = \{\ldots, -12, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, \ldots\}$$

$$(1) = \{\ldots, -11, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \ldots\}$$

$$(2) = \{\ldots, -10, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \ldots\}$$

3) $Z/R = \{(0), (1), (2)\}$

23. En el conjunto P de los puntos del plano, en el que se considera el punto fijo O, se define la siguiente relación binaria.

$$A\,R\,B \Leftrightarrow \overline{OA} = \overline{OB}$$

Se pide:

1) Decir si R es de equivalencia.
2) Hallar las clases de equivalencia.
3) Hallar el conjunto cociente.

Solución

1) R es de equivalencia.

2) La clase definida por un punto A es el subconjunto de puntos del plano que están sobre la circunferencia de centro O y radio OA.

3) El conjunto cociente está formado por todas las circunferencias concéntricas de centro O.

24. En el conjunto de los números complejos se define la siguiente relación binaria

$$(a + bi)\ R\ (c + di) \Leftrightarrow a \leq c \text{ y } b \leq d$$

Se pide:

1) ¿Es R relación de orden?
2) ¿Es de orden total?

Solución

1) Tendrá que cumplir las siguientes propiedades

— Reflexiva: $(a + bi)\ R\ (a + bi) \Leftrightarrow a = a \text{ y } b = b$

— Antisimétrica: Si $(a + bi)\ R\ (c + di)$ y $(c + di)\ R\ (a + bi)$ entonces $(a + bi) = (c + di)$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Que } (a + bi)\ R\ (c + di) \Rightarrow a \leq c \text{ y } b \leq d \\ \\ \text{Que } (c + di)\ R\ (a + bi) \Rightarrow c \leq a \text{ y } d \leq b \end{array}\right\} \quad a = c \text{ y } b = d$$

$$\Rightarrow (a + bi) = (c + di)$$

— Transitiva: Si $(a + bi)\ R\ (c + di)$ y $(c + di)\ R\ (e + fi)$ entonces $(a + bi)\ R\ (e + fi)$

En efecto

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si } (a + bi)\ R\ (c + di) \Rightarrow a \leq c \text{ y } b \leq d \\ \\ \text{Si } (c + di)\ R\ (e + fi) \Rightarrow c \leq e \text{ y } d \leq f\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}a \leq e \\ \\ b \leq f\end{array}\right.$$

Por tanto $(a + bi)\ R\ (e + fi)$

Se trata de una relación de orden.

2) No es de orden total por no cumplir la propiedad conexa porque tomando dos números complejos cualesquiera no están relacionados.

$$(2 + 3i) \text{ y } (1 + 4i)$$

$$(2 + 3i)\ \not R\ (1 + 4i) \text{ porque } 2 \nleq 1$$

$$(1 + 4i)\ \not R\ (2 + 3i) \text{ porque } 4 \nleq 3$$

25. Sea el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$. Consideremos en A la relación binaria

$$x\ R\ y \Leftrightarrow x \,/\, y \text{ (x divide a y)}$$

Se pide:

1) Probar que R es una relación de orden.

2) Hallar los elementos distinguidos: cotas, máximo y mínimo, extremo superior e inferior de cada uno de los subconjuntos.

$B = \{8, 12, 16\}$ $\quad$ $C = \{2, 4, 6, 8\}$, $\quad$ $D = \{12, 16, 24, 48\}$

Solución

1) Es relación de orden por cumplir las propiedades:

— Reflexiva: $\forall\, a \in A \quad a/a$

— Antisimétrica: $a, b \in A \quad$ si a/b y $b/a \Rightarrow a = b$

— Transitiva: $a, b, c \in A$ si a/b y $b/c \Rightarrow a/c$

No es relación de orden total ya que tomados dos elementos de A, por ejemplo 3 y 4, ni 3 divide a 4 ni 4 divide a 3.

2) Elementos distinguidos del subconjunto B

— Cotas superiores de B = {48} ya que $\begin{cases} 8 / 48 \\ 12 / 48 \\ 16 / 48 \end{cases}$

— Cotas inferiores de B = {1, 2, 4}, pues $\begin{cases} 1 / b \\ 2 / b \\ 4 / b \end{cases} \quad \forall\, b \in B$

— No posee máximo ya que no hay una cota superior que pertenezca a B.

— No posee mínimo ya que no hay una cota inferior que pertenezca a B.

— Extremo superior de B es 48 que es la menor cota superior de B.

— Extremo inferior de B es 4 que es la mayor cota inferior de B.

2) Elementos distinguidos del subconjunto C

— Cotas inferiores = {1, 2}
— Cotas superiores = {24, 48}
— Mínimo = 2
— Máximo = no tiene
— Extremo inferior = 2
— Extremo superior = 24

2) Elementos distinguidos del subconjunto D

— Cotas inferiores = {1, 2, 4}
— Cotas superiores = {48}
— Mínimo = no tiene
— Máximo = 48
— Extremo inferior = 4
— Extremo superior = 48.

26. En el conjunto de los números naturales se define la siguiente relación binaria

$$a \mathrel{R} b \Leftrightarrow a \text{ divide a } b$$

Se pide:

1) Decir si R es relación de orden.
2) Dados los subconjuntos de los números naturales

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \text{ y } B = \{3, 6, 12\}$$

hallar

a) Cotas superiores e inferiores de A y B
b) Extremos superior e inferior de A y B
c) Máximos y mínimos de A y B

Solución

1) R es relación de orden.

2a) Cotas superiores de A = m. c. m. (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) = 2.520

luego los múltiplos de 2.520 son las cotas superiores.

— Cotas inferiores de A = {1}
— Cotas superiores de B = 12 ya que m. c. m. (3, 6, 12) = 12
— Cotas inferiores de B = {1, 3}

2b) Extremo superior de A = 2.520
— Extremo inferior de A = 1
— Extremo superior de B = 12
— Extremo inferior de B = 3

2c) Máximo de A = no tiene
— Mínimo de A = 1
— Máximo de B = 12
— Mínimo de B = 3

3. Aplicaciones

CONCEPTOS TEORICOS

— **Correspondencia:** Dados dos conjuntos A y B no vacíos, se llama correspondencia entre A y B a toda operación, ley, norma o criterio que asocia los elementos de A con los de B.

— **Grafo de una correspondencia** es un subconjunto formado por los pares ordenados de elementos asociados.

$$G(f) \subset A \times B \quad \text{siendo } f: A \to B$$

— **Aplicación:** Una correspondencia f de A en B se llama aplicación cuando a todo elemento de A le corresponde un elemento de B y sólo uno.

— **Aplicación inyectiva**

$$f: A \to B$$

$$\forall\, x_1, x_2 \in A,\ x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

— **Aplicación sobreyectiva**

$$f: A \to B \quad f(A) = B$$

— **Aplicación biyectiva:** Cuando lo es inyectiva y sobreyectiva.

— **Aplicación compuesta:**

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \qquad h = g \cdot f$$

$$h(x) = g \cdot f(x)$$

PROBLEMAS

1. Dados los conjuntos $A = \{a, b, c, d, e\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$, decir cuál de las correspondencias f, g y h definidas mediante sus grafos son aplicaciones y de qué tipo.

1) $G(f) = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3), (d, 4), (e, 4)\}$

2) $G(g) = \{(a, 1), (b, 1), (c, 2), (c, 3), (d, 4), (e, 4)\}$

3) $G(h) = \{(a, 2), (b, 2), (c, 2), (d, 3), (e, 3)\}$

Solución

1) A la vista del grafo o bien representando gráficamente la correspondencia se comprueba que es una aplicación sobreyectiva porque $f(A) = B$.

2) No es aplicación porque hay un elemento de A, el c, que tiene dos imágenes: $f(c) = 2$ y $f(c) = 3$.

3) Es solamente una aplicación.

2. Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Determinar si cada una de las siguientes relaciones dadas por su grafo, definen o no una aplicación de X en X y decir de qué tipo:

1) $G(f) = \{(2, 5), (5, 3), (2, 1), (3, 2), (4, 4)\}$

2) $G(f) = \{(2, 1), (3, 4), (1, 4), (4, 5), (5, 4)\}$

3) $G(f) = \{(3, 4), (1, 5), (2, 3), (5, 2), (4, 1)\}$

4) $G(f) = \{(3, 1), (4, 2), (1, 5)\}$

Solución

1) No es aplicación
2) Es aplicación solamente
3) Es aplicación biyectiva
4) No es aplicación

3. Dados los conjuntos A y B se establece entre ellos una correspondencia f tal que $f(x) = x^2$. Decir en cada uno de los siguientes casos si es aplicación y si recibe nombre especial.

a) A = {−2, −1, 0, 1, 2} y B = {0, 1, 4}

b) A = {−2, −1, 0, 1, 2} y B = {0, 1, 2, 4}

c) A = {0, 1, 2} y B = {0, 1, 2, 4}

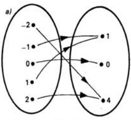
d) A = {−1, 0, 1, 2} y B = {0, 1, 2, 4}

e) A = {0, 1, 2} y B = {0, 1, 4}

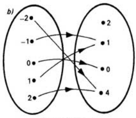
f) A = {0, 1, 2} y B = {0, 1, 2}

Solución

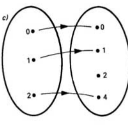
Representamos gráficamente cada uno de los seis casos sabiendo que la correspondencia asocia cada elemento de A con su cuadrado en B.



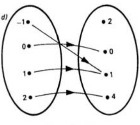
Es aplicación sobreyectiva



Es aplicación

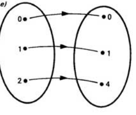


Es aplicación inyectiva



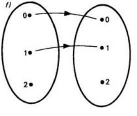
Es aplicación

e)



Es aplicación biyectiva

f)



No es aplicación

4. Se establece una correspondencia entre los conjuntos A y B de tal modo que a $x \in A$ le corresponde $y = x^2$. Averiguar en cuál de los siguientes casos la correspondencia es aplicación y si ésta recibe nombre especial.

a) $A = \{x \mid x \in N\}$ $\qquad B = \{y \mid y \in N\}$
b) $A = \{x \mid x \in Z,\ x \neq 0\}$ $\qquad B = \{y \mid y \in N;\ y = \text{cuadr. perf.}\}$
c) $A = \{x \mid x \in Z\}$ $\qquad B = \{y \mid y \in Z\}$
d) $A = \{x \mid x \in R^{+}\}$ $\qquad B = \{y \mid y \in R^{+}\}$
e) $A = \{x \mid x \in R\}$ $\qquad B = \{y \mid y \in R^{+}\}$
f) $A = \{x \mid x \in R^{-}\}$ $\qquad B = \{y \mid y \in R^{+}\}$

Solución

a) Aplicación inyectiva
b) Aplicación sobreyectiva
c) Aplicación solamente
d) Aplicación biyectiva
e) Aplicación sobreyectiva
f) Aplicación biyectiva

5. Se establece una correspondencia entre los conjuntos A y B de tal modo que a $x \in A$ le corresponde $y = \operatorname{sen} x \in B$. Decir en cuál de los siguientes casos la correspondencia es aplicación y si ésta recibe nombre especial.

1) $A = \{x \mid x \in R^+\}$	$B = \{y \mid y \in R^+\}$
2) $A = \{x \mid x \in R\}$	$B = \{y \mid y \in R\}$
3) $A = \{x \mid x \in R\}$	$B = \{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$
4) $A = \{x \mid 0 \leq x \leq \pi\}$	$B = \{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$
5) $A = \{x \mid 0 \leq x \leq \pi\}$	$B = \{y \mid 0 \leq y \leq 1\}$

Solución

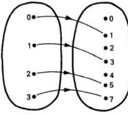
Aplicando el mismo procedimiento que en casos anteriores se obtiene lo siguiente:

1) No es aplicación ($\frac{3\pi}{2}$ no tiene imagen)
2) Aplicación solamente
3) Aplicación sobreyectiva
4) Aplicación solamente
5) Aplicación sobreyectiva

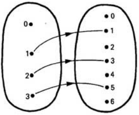
6. Las correspondencias entre $N \cup \{0\}$ y $N \cup \{0\}$ definidas por $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = 2x - 1$. ¿Son aplicaciones? ¿Qué subconjuntos $S \subset N \cup \{0\}$ deben tomarse para que definan una aplicación biyectiva de $N \cup \{0\}$ en S?

Solución

Para ver si estas dos correspondencias son o no aplicaciones tomamos algunos elementos de $N \cup \{0\}$ y establecemos las correspondencias f y g.



f es aplicación inyectiva



g no es aplicación

Para que la aplicación f sea biyectiva, el conjunto de llegada S debe de estar formado únicamente por los números naturales impares.

$$S = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots\}$$

7. Dadas las aplicaciones f: $A \rightarrow B$ y g: $B \rightarrow C$ se considera la aplicación h: $A \rightarrow C$ tal que h es el producto de f por g, es decir $h = g \cdot f$. Se pide demostrar que si f y g son inyectivas, también h es inyectiva.

Solución

$$\text{Sea} \quad f(x_1) = y_1 \quad y \quad g(y_1) = z_1$$

$$f(x_2) = y_2 \quad y \quad g(y_2) = z_2$$

Por ser f inyectiva: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow y_1 \neq y_2$

Por ser g inyectiva: $y_1 \neq y_2 \Rightarrow g(y_1) \neq g(y_2) \Rightarrow z_1 \neq z_2$

Considerando $x_1 \neq x_2$

$$h(x_1) = g \cdot f(x_1) = g[f(x_1)] = g(y_1) = z_1$$

$$h(x_2) = g \cdot f(x_2) = g[f(x_2)] = g(y_2) = z_2$$

al ser $z_1 \neq z_2 \Rightarrow h(x_1) \neq h(x_2) \Rightarrow$ h es inyectiva

8. Dadas las aplicaciones f: $A \rightarrow B$ y g: $B \rightarrow C$ se considera la aplicación h: $A \rightarrow C$ tal que h es el producto de f por g, es decir $h = g \cdot f$. Se pide demostrar que si f y g son sobreyectivas, también h es sobreyectiva.

Solución

— Por ser g sobreyectiva: $\forall z \in C \; \exists \; y \in B \mid g(y) = z$
— Por ser f sobreyectiva: $\forall y \in B \; \exists \; x \in A \mid f(x) = y$

Dado $\forall z \in C \; \exists \; x \in A \mid h(x) = z$

En efecto: $h(x) = g \cdot f(x) = g(y) = z \Rightarrow$ h es sobreyectiva

9. Probar que si f: $A \rightarrow B$ y g: $B \rightarrow C$ son aplicaciones biyectivas, se verifica.

$$(g \cdot f)^{-1} = f^{-1} \cdot g^{-1}$$

Solución

$$\left.\begin{array}{r} (g \cdot f) \cdot (f^{-1} \cdot g^{-1}) = i_c \\ (f^{-1} \cdot g^{-1}) \cdot (g \cdot f) = i_A \end{array}\right\} (g \cdot f)^{-1} = f^{-1} \cdot g^{-1}$$

10. Sea la aplicación f: $Z \rightarrow Z$ definida por:

$$f(x) = x^2 - 5x + 4$$

Calcular:

a) $f(3)$	*d)* $f(x - y)$
b) $f(-2)$	*e)* $f(1) - f(-1)$
c) $f(x + y)$	*f)* $f(-2) - f(2)$

Solución

Dada la aplicación $f(x) = x^2 - 5x + 4$, se tiene:

a) $f(3) = 3^2 - 5 \times 3 + 4 = -2$

b) $f(-2) = (-2)^2 - 5(-2) + 4 = 18$

c) $f(x + y) = (x + y)^2 - 5(x + y) + 4 =$

$= x^2 + 2xy + y^2 - 5x - 5y + 4$

d) $f(x - y) = (x - y)^2 - 5(x - y) + 4 =$

$= x^2 - 2xy + y^2 - 5x + 5y + 4$

e) $f(1) - f(-1) = -10$

f) $f(-2) - f(2) = 20$

11. Dadas las aplicaciones f: A → B, g: B → C y h: C → D por:

$$f(x) = x + 1;\ g(y) = y^2;\ h(z) = \frac{z}{4}$$

Demostrar que:

$$h \cdot (g \cdot f) = (h \cdot g) \cdot f$$

y obtener la imagen de 1 en la aplicación compuesta

Solución

$$[h \cdot (g \cdot f)](x) = [(h \cdot g) \cdot f](x) = \frac{(x + 1)^2}{4}$$

$$[h \cdot (g \cdot f)](1) = \frac{(1 + 1)^2}{4} = 1$$

12. La correspondencia:

$$f(x) = \frac{5x}{x^2 - 3x + 2}$$

no es una aplicación de Q en Q. ¿Qué números es preciso excluir del conjunto de partida para que la correspondencia f sea una aplicación?

Solución

Para que $f(x) = \dfrac{5x}{x^2 - 3x + 2} \in Q$ el denominador tiene que ser un número distinto de cero, luego

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

El conjunto de partida será $Q - \{1, 2\}$ para que f sea aplicación.

13. Dadas las aplicaciones de Q en Q definidas por:

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2+1} \qquad g(x) = 2x^2 + x + 5$$

Hallar las aplicaciones: $g \cdot f(x)$ y $f \cdot g(x)$. ¿Cuánto vale $g \cdot f(1)$? ¿Cuánto vale $f \cdot g\ (1)$?

Solución

$$g \cdot f(x) = g[f(x)] = g\left(\frac{2x+1}{x^2+1}\right) = 2\left(\frac{2x+1}{x^2+1}\right)^2 + \left(\frac{2x+1}{x^2+1}\right) + 5 =$$

$$= \frac{5x^4 + 2x^3 + 19x^2 + 10x + 8}{(x^2+1)^2}$$

$$f \cdot g(x) = f[g(x)] = f(2x^2 + x + 5) =$$

$$= \frac{2(2x^2 + x + 5) + 1}{(2x^2 + x + 5)^2 + 1} = \frac{4x^2 + 2x + 11}{(2x^2 + x + 5)^2 + 1}$$

$$g \cdot f(1) = 11$$

$$f \cdot g(1) = \frac{17}{65}$$

14. Se consideran las aplicaciones f y g de R en R dadas por

$$f(x) = x + 1$$

$$g(x) = x^2 + 3$$

Se pide:

1) ¿Son f^{-1} y g^{-1} aplicaciones?

2) Definir la función compuesta $g \cdot f$
3) Definir la función compuesta $f \cdot g$

Solución

1) $f^{-1}(x) = x - 1$ es aplicación

$g^{-1}(x) = \sqrt{x - 3}$ no es aplicación

2) $g \cdot f(x) = x^2 + 2x + 4$

3) $f \cdot g(x) = x^2 + 4$

15. Se consideran las aplicaciones de R en R siguientes:

$$f_1(x) = x \qquad f_2(x) = \frac{1}{x} \qquad f_3(x) = -x \qquad f_4(x) = -\frac{1}{x}$$

Se pide escribir en una tabla de doble entrada todas las funciones compuestas:

$$f_j \cdot f_i(x) = f_j[f_i(x)]$$

Solución

$\cdot$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2
f_4	f_4	f_3	f_2	f_1

16. Dados los conjuntos

$V = \{a, e, i, o, u\}$

$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$C = \{m, n, p, q\}$

Se consideran las aplicaciones $f: V \rightarrow N$ y $g: N \rightarrow C$ definidas así:

$f(a) = 1, f(e) = 1, f(i) = 2, f(o) = 3, f(u) = 4$

$g(1) = m, g(2) = n, g(3) = p, g(4) = q, g(5) = q, g(6) = q$

Se pide construir la aplicación h: V $\rightarrow$ C siendo h = g · f. ¿Qué tipo de aplicación es h?

Solución

1) h (a) = m, h (e) = m, h (i) = n, h (o) = p, h (u) = q
2) La aplicación h es sobreyectiva.

17. Sean las aplicaciones f y g de Q en Q de la forma

$$f(x) = \frac{1}{2} - x \qquad g(x) = 2x^2 - \frac{1}{2}$$

Se pide:

1) Hallar f^{-1} comprobando que $f^{-1} \cdot f(x) = x$
2) Probar que g no es inyectiva dando dos valores a x que tengan la misma imagen.
3) Comprobar que:

$$\frac{g(x)}{f(x)} = ax + b$$

siendo a y b dos números enteros.
4) Comprobar que:

$$g(x) - f(x) = ax^2 + bx + c$$

siendo a, b y c números enteros.

Solución

1) $f^{-1}(x) = \frac{1}{2} - x$

$$f^{-1} \cdot f(x) = f^{-1}\left(\frac{1}{2} - x\right) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - x\right) = x$$

2) $g(1) = \frac{3}{2}$, $g(-1) = \frac{3}{2} \Rightarrow$ no es inyectiva

3) $$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{2x^2 - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - x} = ax + b \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases}$$

4) $g(x) - f(x) = (2x^2 - \frac{1}{2}) - (\frac{1}{2} - x) = 2x^2 + x - 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases}$

18. Dados dos subconjuntos A y B de X, se considera la aplicación

$$f: X \to Y$$

Demostrar: $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ cuando f es sólo aplicación.

Solución

Aplicando la propiedad antisimétrica de la inclusión vemos

1) $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$

$$\forall y \in f(A \cup B) \Rightarrow \exists\ x \in A \cup B \mid f(x) = y$$

$$x \in A \cup B \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ \text{o} \\ x \in B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = f(x) \in f(A) \\ \text{o} \\ y = f(x) \in f(B) \end{cases} \Rightarrow y \in f(A) \cup f(B)$$

2) $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$

$$\forall y \in f(A) \cup f(B) \Rightarrow \begin{cases} y \in f(A) \\ \text{o} \\ y \in f(B) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists\ x \in A \mid f(x) = y \\ \text{o} \\ \exists\ x \in B \mid f(x) = y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \exists\ x \in A \cup B \mid f(x) = y \Rightarrow y \in f(A \cup B)$$

Por tanto

$$f(A \cup B) = f(A) \cup (B)$$

19. Dados dos subconjuntos A y B de X se considera la aplicación

$$f: X \to Y$$

Demostrar que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ cuando f es sólo aplicación.

Solución

$$\forall\ y \in f(A \cap B) \Rightarrow \exists\ x \in A \cap B \mid f(x) = y$$

$$\text{Si } x \in A \cap B \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x \in A \\ y \\ x \in B \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} y = f(x) \in f(A) \\ y \\ y = f(x) \in f(B) \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y \in f(A) \cap f(B)$$

Por lo tanto

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$

20. Dados dos subconjuntos A y B de X, se considera la aplicación

$$f: X \rightarrow Y$$

Demostrar que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ cuando f es inyectiva.

Solución

Aplicando la propiedad antisimétrica de la inclusión

1) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ ya se ha demostrado en el caso anterior.

2) $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$ siendo f inyectiva

$$\forall\ y \in f(A) \cap f(B) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} y \in f(A) \\ e \\ y \in f(B) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \exists\ x \in A \mid f(x) = y \\ y \\ \exists\ x' \in B \mid f(x') = y \end{array} \right.$$

Al ser f inyectiva $y = f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

es decir $\exists\ x \in A \cap B \mid f(x) = y \in f(A \cap B)$

Por lo tanto si f es inyectiva

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

21. Dada la función f: R $\rightarrow$ R definido por

$$f(x) = \frac{x^2}{(x-2)(x-3)}$$

1) ¿Qué valores hay que excluir del conjunto de partida para que la función sea una aplicación?

2) ¿Cuál es la antiimagen de 1?

Solución

1) El conjunto de partida es R $-$ {2, 3} ya que para x = 2 y x = 3 se anula el denominador.

2) Haciendo

$$f(x) = \frac{x^2}{(x-2)(x-3)} = 1 \Rightarrow x = \frac{6}{5}$$

22. Dada la función f: R $\rightarrow$ R definida por

$$f(x) = \frac{3x-2}{x-1}$$

1) ¿Qué valores hay que excluir de R para que la función sea una aplicación?

2) ¿Es aplicación inyectiva?

3) ¿Cuál será la antiimagen del número 4?

4) ¿Cuánto vale f^{-1}? Comprobar que $f^{-1} \cdot f$ = identidad.

Solución

1) Para que la función sea aplicación habrá que eliminar del conjunto de definición el número 1 ya que

$$f(1) \notin R$$

Por tanto es aplicación

$$f: R - \{1\} \rightarrow R$$

$$x \rightarrow \frac{3x-2}{x-1}$$

2) Para ver si es inyectiva

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{3x_1 - 2}{x_1 - 1} = \frac{3x_2 - 2}{x_2 - 1} \Rightarrow$$

$$3x_1 x_2 - 3x_1 - 2x_2 + 2 = 3x_1 x_2 - 2x_1 - 3x_2 + 2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Lo es.

3) La antiimagen de 4 se obtiene así

$$f(x) = 4$$

$$\frac{3x - 2}{x - 1} = 4 \Rightarrow 3x - 2 = 4x - 4 \Rightarrow x = 2$$

4) Para hallar f^{-1} hacemos

$$f(x) = \frac{3x - 2}{x - 1} = y \Rightarrow 3x - 2 = xy - y$$

$$x = \frac{y - 2}{y - 3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x - 2}{x - 3}$$

Comprobemos: $f^{-1} \cdot f(x) = x$

$$f^{-1} \cdot f(x) = f^{-1}[f(x)] = f^{-1}\left(\frac{3x - 2}{x - 1}\right) = \frac{\dfrac{3x - 2}{x - 1} - 2}{\dfrac{3x - 2}{x - 1} - 3} = x$$

23. Dadas las aplicaciones f y g de Z en Z mediante $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2 - 3$. Se pide:

1) Obtener las correspondencias f^{-1} y g^{-1}

2) Decir qué tipo de aplicaciones son f, g, f^{-1}, g^{-1}

3) Obtener el producto, $g \cdot f$, $f \cdot g$, $f \cdot f^{-1}$ y $g^{-1} \cdot g$

4) Obtener $g \cdot f^{-1}(5)$ y $f \cdot g^{-1}(1)$

Solución

1) $f(x) = x + 1 = y \Rightarrow x = y - 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = x - 1$

$g(x) = x^2 - 3 = y \Rightarrow x = \sqrt{y + 3} \Rightarrow g^{-1}(x) = \sqrt{x + 3}$

2) f es aplicación biyectiva

g es aplicación solamente

f^{-1} es aplicación biyectiva

g^{-1} es una correspondencia, no aplicación

3) $g \cdot f(x) = g[f(x)] = g(x+1) = (x+1)^2 - 3 = x^2 + 2x - 2$

$f \cdot g(x) = f[g(x)] = f(x^2 - 3) = (x^2 - 3) + 1 = x^2 - 2$

$f \cdot f^{-1}(x) = f[f^{-1}(x)] = f(x-1) = (x-1) + 1 = x$

$g^{-1} \cdot g(x) = g^{-1}[g(x)] = g^{-1}(x^2 - 3) = \sqrt{(x^2 - 3) + 3} = x$

4) $g \cdot f^{-1}(x) = g[f^{-1}(x)] = g(x-1) = (x-1)^2 - 3 =$

$= x^2 - 2x - 2$

$g \cdot f^{-1}(5) = 5^2 - 2 \times 5 - 2 = 13$

$f \cdot g^{-1}(x) = f[g^{-1}(x)] = f(\sqrt{x+3}) = \sqrt{x+3} + 1$

$f \cdot g^{-1}(1) = \sqrt{1+3} + 1 = 2 + 1 = 3$

24. Dada la aplicación de $Q \times Q$ en Q definida por $f(x, y) = x^2 + y$; y la aplicación g de Q en Q definida por $g(x) = (2x + 6,\ x^2 + 3)$. Hallar.

1) $g \cdot f(x, y)$ de $Q \times Q$ en $Q \times Q$
2) $f \cdot g(x)$ de Q en Q
3) $g \cdot f(1, 2)$
4) $f \cdot g(0)$

Solución

1) $g \cdot f(x, y) = (2x^2 + 2y + 6;\ x^4 + y^2 + 2x^2 y + 3)$

2) $f \cdot g(x) = 5x^2 + 24x + 39$

3) $g \cdot f(1, 2) = (12, 12)$

4) $f \cdot g(0) = 39$

25. Dadas las aplicaciones $f(x) = 3x^2 - 1$ y $g(x) = -x + 3$ del conjunto R en sí mismo, se pide

1) Estudiar cada una de las aplicaciones
2) Estudiar la aplicación compuesta $g \cdot f$
3) Estudiar la aplicación compuesta $g \cdot f \cdot g^{-1}$

Solución

1) La aplicación $f(x) = 3x^2 - 1$ no es inyectiva pues $f(x) = f(-x)$ y tampoco es sobreyectiva pues

$$\text{Im } f = \{-1 \leq x \leq 0\} \cup R^+$$

La aplicación $g(x)$ es biyectiva.

2) La aplicación compuesta $g \cdot f$

$$g \cdot f(x) = g(3x^2 - 1) = -(3x^2 - 1) + 3 = -3x^2 + 4$$

es simplemente aplicación, estando el conjunto imagen formado por

$$\text{Im } (g \cdot f) = \{x \mid -\infty < x \leq 4\}$$

3) La aplicación $g \cdot f \cdot g^{-1}$ se obtiene así

$$g(x) = -x + 3 = y \Rightarrow x = 3 - y \Rightarrow g^{-1}(x) = 3 - x$$

Por tanto

$$g \cdot f \cdot g^{-1}(x) = g \cdot f(3 - x) = g[3(3 - x)^2 - 1] =$$
$$= g[3x^2 - 18x + 26] = -(3x^2 - 18x + 26) + 3 =$$
$$= -3x^2 + 18x - 23$$

26. Dadas las aplicaciones $f(x) = 2 - x^2$ y $g(x) = x - 1$ del conjunto R en sí mismo, se pide

1) Estudiar cada una de las aplicaciones
2) Estudiar la aplicación compuesta $f \cdot g$
3) Estudiar la aplicación compuesta $f \cdot g \cdot f^{-1}$

Solución

1) f es aplicación solamente
g es aplicación biyectiva

2) $f \cdot g(x) = -x^2 + 2x + 1$

3) No existe aplicación compuesta $f \cdot g \cdot f^{-1}$ pues f^{-1} no es aplicación.

27. Definimos las siguientes aplicaciones en el conjunto R de los números reales

$$f: x \rightarrow 2^x$$
$$g: x \rightarrow x^2$$
$$h: x \rightarrow 2x$$

Calcular:

1) $f \cdot g \cdot h$
2) $h \cdot g \cdot f$
3) $h \cdot h \cdot g \cdot f$

Solución

1) $f \cdot g \cdot h\ (x) = (f\ \cdot g)\ (2x) = f\ [(2x)^2] = f\ (4x^2) = 2^{4x^2}$

2) $h \cdot g \cdot f\ (x) = h\ \cdot\ g\ (2^x) = h\ [(2^x)^2] = h\ (2^{2x}) = 2^{1+2x}$

$h \cdot h \cdot g \cdot f\ (x) = h\ (2^{1+2x}) = 2^{2+2x}$

28. Dadas las aplicaciones $f(x) = 2 - x^2$ y $g(x) = \dfrac{x-1}{3}$ del conjunto de los números reales en sí mismo

1) Estudiar las aplicaciones f y g
2) Estudiar las aplicaciones $g \cdot f^{-1}$ y $g^{-1} \cdot f$

Solución

1) f es aplicación solamente
g es aplicación biyectiva
2) f^{-1} no existe y por tanto $g\ \cdot f^{-1}$ tampoco

$$g^{-1}\ \cdot f\ (x) = 7 - 3x^2$$

29. Dadas las aplicaciones f y g de Q en Q

$$f(x) = \frac{1-2x}{2}$$
$$g(x) = \frac{4x^2-1}{2}$$

Completar la siguiente tabla

x	f (x)	g (x)	g · f (x)	f · g (x)	NOTAS
0					
	0				
		0			Tomar sólo el valor − de x
			4		Tomar sólo un valor de x
				−7	Tomar uno sólo de los valores de x

Solución

$$g \cdot f(x) = g\left(\frac{1-2x}{2}\right) - \frac{4\left(\frac{1-2x}{2}\right)^2 - 1}{2} = \frac{(1-2x)^2 - 1}{2}$$

$$f \cdot g(x) = f\left(\frac{4x^2-1}{2}\right) = \frac{1 - 2\left(\frac{4x^2-1}{2}\right)}{2} = 1 - 2x^2$$

Por tanto

$$g(x) = 0 \Rightarrow \frac{4x^2-1}{2} = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2}$$

$$g \cdot f(x) = 4 \Rightarrow \frac{(1-2x)^2 - 1}{2} = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$f \cdot g(x) = -7 \Rightarrow 1 - 2x^2 = -7 \Rightarrow x = \pm 2$$

El cuadro quedará así:

x	f (x)	g (x)	g · f (x)	f · g (x)
−	1/2	−1/2	0	1
1/2	−	0	−1/2	1/2
−1/2	1	−	3/2	1/2
−1	3/2	3/2	−	−1
2	−3/2	15/2	4	−

30. Dadas las aplicaciones

$$f(x) = x^3$$

$$f \cdot g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

Encontrar el valor de g (x)

Solución

Hacemos: $f(x) = y = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

Además

$$[f^{-1} \cdot (f \cdot g)](x) = [(f^{-1} \cdot f) \cdot g](x) = [i \cdot g](x) = g(x)$$

luego

$$g(x) = [f^{-1} \cdot (f \cdot g)](x) = f^{-1}(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) =$$

$$= \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} = \sqrt[3]{(x-1)^3} = x - 1$$

$$g(x) = x - 1$$

31. Dadas las aplicaciones

$$[g \cdot f](x) = 2x^2 + 6x + 9$$

$$g(x) = 2x - 1$$

Hallar f (x)

Solución

$$g^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$$

$$f(x) = [(g^{-1} \cdot g) \cdot f](x) = [g^{-1} \cdot (g \cdot f)](x) =$$

$$g^{-1}(2x^2 + 6x + 9) = \frac{(2x^2 + 6x + 9) + 1}{2} = x^2 + 3x + 5$$

4. Números naturales

CONCEPTOS TEORICOS

— **Definición de número natural:** Es el cardinal de la clase de equivalencia definida en el conjunto universal por la relación de coordinabilidad.

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, n, \dots\}$$

— **Suma de números naturales:** Dados dos conjuntos A y B finitos y disjuntos, siendo $n(A) = a$ y $n(B) = b$, se define:

$$a + b = n(A \cup B) = c$$

— **Producto de números naturales:** Dados dos conjuntos A y B, siendo $n(A) = a$ y $n(B) = b$

$$a \times b = n(A \times B) = n(A) \times n(B)$$

— **Estructuras**

$(N, +)$ es semigrupo conmutativo
$(N, \times)$ es semigrupo unitario conmutativo
$(N, +, \times)$ es semianillo unitario conmutativo

— **Axiomática de Peano**

1) Uno es un número natural: $1 \in N$

2) A cada número natural corresponde un número natural siguiente a él unívocamente determinado

$$\text{Si } x \in N \Rightarrow \text{sg } x \in N$$

3) El 1 no tiene precedente

$$\forall\, x \in N \quad \text{sig}\, x \neq 1$$

Es decir sg (pr x) = x

4) De la igualdad

$$\text{sg}\, x = \text{sg}\, y \Rightarrow x = y$$

5) Axioma de inducción completa. Si de un conjunto C de números naturales ($C \subset N$) se sabe que cumple las dos condiciones:

— El número $1 \in N$

— Si $x \in C \Rightarrow \text{sg}\, x \in C$, entonces todos los números naturales pertenecen al conjunto C ($N \subset C$) y entonces $C = N$.

6) Suma: A cada par de números naturales x, y corresponde unívocamente otro número natural designado por $x + y$ construido así:

$$x + 1 = \text{sg}\, x \quad \forall\, x \in N$$

$$x + \text{sg}\, y = \text{sg}\,(x + y) \ \forall\, x, y \in N$$

7) Producto: A cada par de números naturales x, y corresponde unívocamente otro número natural designado por $x \times y$ construido así:

$$x \times 1 = x \qquad x \in N$$

$$x \times \text{sg}\, y = x \times y + x \qquad \forall\, x, y \in N$$

PROBLEMAS

1. Demostrar que si $a < b$ y $c < d$ siendo $a, b, c, d \in N$ se verifica

$$a + c < b + d$$

Solución

Si $a < b \Rightarrow \exists\, p \in N \mid a + p = b$

Si $c < d \Rightarrow \exists\, q \in N \mid c + q = d$

Sumando m. a m.

$$a + p + c + q = b + d$$

de donde

$$a + c < b + d$$

2. Demostrar que si, $a < b$ y $c < d$ siendo $a, b, c, d \in N$ se verifica

$$a\,c < b\,d$$

Solución

$$\text{Si } a < b \Rightarrow \exists\, p \in N \mid a + p = b$$

$$\text{Si } c < d \Rightarrow \exists\, q \in N \mid c + q = d$$

multiplicando m. a m. $\quad ac + aq + cp + pq = bd$

de donde

$$ac < bd$$

3. Demostrar que para números naturales a y b no puede valer

$$a < b < a + 1$$

Solución

$$\text{Si } a < b \Rightarrow \exists\, n \in N \mid a + n = b$$

$$\text{Si } b < a + 1 \Rightarrow \exists\, p \in N \mid b + p = a + 1$$

sumando m. a m.

$$a + b + n + p = b + a + 1$$

de donde:

$$n + p = 1$$

Como $n, p \in N$ el menor valor que puede tomar tanto n como p es 1, luego es imposible.

4. Demostrar que si n es el producto de dos números naturales consecutivos $4n + 1$ es cuadrado perfecto.

Solución

Llamando $\quad n = x\,(x + 1) \quad$ con $\quad x \in N$

Se cumple:

$$4n + 1 = 4x(x + 1) + 1 = 4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$$

5. Basándose en la axiomática de Peano, demostrar:

$$\text{sg } a + b = a + \text{sg } b$$

Solución

Por la definición de suma

$$\text{sg } a = a + 1$$

$$a + \text{sg } b = \text{sg } (a + b)$$

Por tanto

$$\text{sg } a + 1 = \text{sg } (\text{sg } a) = \text{sg } (a + 1) = a + \text{sg } 1$$

para $b = 1$

En general para b

$$\text{sg } a + b = a + \text{sg } b$$

Supuesta cierta esta igualdad para el número b, vamos a demostrar que también es cierta para sg b

$$\text{sg } a + \text{sg } b = \text{sg } (\text{sg } a + b) = \text{sg } (a + \text{sg } b) = a + \text{sg } (\text{sg } b)$$

6. Basándose en la axiomática de Peano, demostrar

$$1 + a = a + 1$$

Solución

Para $a = 1$ la igualdad es cierta
Supuesta cierta para a, lo será también para sg a

$$1 + \text{sg } a = \text{sg } a + 1$$

En efecto

Sabemos que $(1 + \text{sg } a) = \text{sg } (a + 1)$

luego

$$1 + \text{sg } a = \text{sg } (a + 1) = a + \text{sg } 1 = \text{sg } a + 1$$

7. Basándose en la axiomática del número natural dada por Peano, demostrar

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Solución

Para $c = 1$

$$(a + b) + 1 = sg\,(a + b) = a + sg\,b = a + (b + 1)$$

Supuesta cierta para c

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

también lo será para sg c, es decir

$$(a + b) + sg\,c = a + (b + sg\,c)$$

Por definición de suma: $a + sg\,b = sg\,(a + b)$, luego

$$(a + b) + sgc = sg\,[(a + b) + c] = sg\,[a + (b + c)] = a + sg\,(b + c) =$$
$$= a + (b + sgc)$$

8. Basándose en la axiomática de Peano, demostrar

$$(ab)\,c = a\,(bc)$$

Solución

Para $c = 1$

$$(ab) \times 1 = ab = a\,(b \times 1)$$

que es cierta por la definición de multiplicación

Supuesta cierta para c

$$(ab)\,c = a\,(bc)$$

para sgc es

$$(ab)\,sgc = a\,(bsg\,c)$$

Por ser: $a\,sgb = ab + a$, resulta

$$(ab)\,sg\,c = (ab)\,c + ab = a\,(bc) + ab = a\,(bc + b) = a\,(bsg\,c)$$

9. Basándose en la axiomática de Peano, demostrar

$$(a + b)\, c = ac + bc$$

Solución

Para $c = 1$, aplicando la definición del producto

$$(a + b) \times 1 = a + b = a \times 1 + b \times 1$$

Supuesta cierta para c

$$(a + b)\, c = ac + bc$$

vamos a demostrar que también es cierta para sg c

$$(a + b)\, \text{sg}\, c = a\, \text{sg}\, c + b\, \text{sgc}$$

Por el producto: $a\, \text{sg}\, b = ab + a$

Por tanto:

$$(a + b)\, \text{sg}\, c = (a + b)\, c + (a + b) = ac + bc + a + b =$$

$$= (ac + a) + (bc + b) = a\, \text{sgc} + b\, \text{sgc}$$

10. Demostrar que dentro del conjunto N de los números naturales, la relación $<$ es transitiva pero no reflexiva, ni simétrica.

Solución

Sean $a, b, c \in N$

— Transitiva:

$$\text{Si } a < b \text{ y } b < c \Rightarrow a < c$$

En efecto

$$\begin{array}{ll} \text{Si } a < b \Rightarrow & \exists\, p \in N \mid a + p = b \\ \text{Si } b < c \Rightarrow & \exists\, q \in N \mid b + q = c \\ \hline \text{Sumando m. a m.} & a + b + p + q = b + c \\ \text{Simplificando} & \Rightarrow a + (p + q) = c \Rightarrow a < c \end{array}$$

— No es reflexiva:

Si $a \in N$ no se cumple que $a < a$ pues de lo contrario existiría un $p \in N$ tal que

$$a + p = a$$

cosa que es imposible

— No es simétrica:

Tendría que ocurrir que siendo $a, b \in N$

$$a < b \Rightarrow b < a$$

Pero si $a < b \Rightarrow \quad \exists\, p \in N \mid a + p = b$

si $b < a \Rightarrow \quad \exists\, q \in N \mid b + q = a$

y de la primera no se puede obtener la segunda igualdad

11. Siendo m y n dos números naturales, demostrar que

$$m^2 < m\,n < n^2 \qquad \text{si } m < n$$

Solución

Si $m < n \Rightarrow \quad \exists\, p \in N \mid m + p = n$

Si multiplicamos los dos miembros de la igualdad por m resulta

$$m^2 + mp = mn \Rightarrow m^2 < m\,n \quad (1)$$

Si multiplicamos los dos miembros de $m + p = n$ por n resulta

$$mn + pn = n^2 \Rightarrow mn < n^2 \quad (2)$$

De (1) y (2) podemos poner

$$m^2 < m\,n < n^2$$

12. Siendo m y n dos números naturales distintos se cumple siempre

$$m^2 + n^2 > 2mn$$

Solución

En efecto $m^2 + n^2 > 2mn \Rightarrow m^2 + n^2 - 2mn > 0$

de donde $(m - n)^2 > 0$ cosa que siempre ocurre siendo $m \neq n$

13. Aplicando el principio de inducción completa demostrar

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Solución

Para n = 1 resulta $1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$

Para n = 2 resulta $1 + 2 = \frac{2(2+1)}{2} = 3$

Para n = 3 resulta $1 + 2 + 3 = \frac{3(3+1)}{2} = 6$

Supuesta cierta para n = h

$$1 + 2 + 3 + \dots + h = \frac{h(h+1)}{2}$$

Vamos a demostrar que también es cierta para n = h + 1.

$$1 + 2 + 3 + \dots + h + (h+1) = \frac{(h+1)(h+2)}{2}$$

En efecto.

$$1 + 2 + 3 + \dots + h + (h+1) = \frac{h(h+1)}{2} + (h+1) =$$

$$= \frac{h(h+1) + 2(h+1)}{2} = \frac{(h+1)(h+2)}{2}$$

14. Demostrar por el principio de inducción

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Solución

Para n = 1 resulta $1^2 = \frac{1 \times (1+1)(2+1)}{6} = 1$

Para n = 2 resulta $1^2 + 2^2 = \frac{2 \times (2+1)(4+1)}{6} = 5$

Supuesta cierta para $n = h$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + h^2 = \frac{h(h+1)(2h+1)}{6}$$

Vamos a demostrar que también es cierta para $n = h + 1$

En efecto

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + h^2 + (h+1)^2 = \frac{h(h+1)(2h+1)}{6} + (h+1)^2 =$$

$$= \frac{h(h+1)(2h+1) + 6(h+1)^2}{6} =$$

$$= \frac{(h+1)[h(2h+1) + 6(h+1)]}{6} = \frac{(h+1)(2h^2 + 7h + 6)}{6} =$$

$$= \frac{(h+1)(h+2)(2h+3)}{6}$$

15. Demostrar por el principio de inducción

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Solución

Aplicando el procedimiento anterior, se comprueba que sigue siendo cierta para $n = h + 1$.

$$1^3 + 2^3 + \dots + (h+1)^3 = \frac{(h+1)^2(h+2)^2}{4}$$

16. Demostrar por el principio de inducción

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Solución

Para $n = 1$ resulta $1 \times 2 = \dfrac{1 \times (1+1)(1+2)}{3} = 2$

Para $n = 2$ resulta $1 \times 2 + 2 \times 3 = \dfrac{2 \times (2+1)(2+2)}{3} = 8$

Supuesto cierto para $n = h$

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + h(h+1) = \frac{h(h+1)(h+2)}{3}$$

Vamos a demostrar que también es cierto para $n = h + 1$

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + h(h+1) + (h+1)(h+2) =$$

$$= \frac{h(h+1)(h+2)}{3} + (h+1)(h+2) =$$

$$= \frac{h(h+1)(h+2) + 3(h+1)(h+2)}{3} =$$

$$= \frac{(h+1)(h+2)(h+3)}{3}$$

17. Demostrar por el principio de inducción

$$1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + \dots + n(n+1)(n+2) =$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

Solución

Se aplica el procedimiento anterior comprobando que para $n = h + 1$ resulta

$$1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + \dots + (h+1)(h+2)(h+3) =$$

$$= \frac{(h+1)(h+2)(h+3)(h+4)}{4}$$

18. Demostrar por el principio de inducción

$$\frac{1^2}{1 \times 3} + \frac{2^2}{3 \times 5} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

Solución

Para $n = 1$ resulta $\frac{1^2}{1 \times 3} = \frac{1(1+1)}{2(2+1)} = \frac{1}{3}$

Para n = 2 resulta $\frac{1^2}{1 \times 3} + \frac{2^2}{3 \times 5} = \frac{2(2+1)}{2(4+1)} = \frac{3}{5}$

Supuesto cierto para n = h

$$\frac{1^2}{1 \times 3} + \frac{2^2}{3 \times 5} + \dots + \frac{h^2}{(2h-1)(2h+1)} = \frac{h(h+1)}{2(2h+1)}$$

Vamos a demostrar que también es cierta para n = h + 1

$$\frac{1^2}{1 \times 3} + \frac{2^2}{3 \times 5} + \dots + \frac{h^2}{(2h-1)(2h+1)} + \frac{(h+1)^2}{(2h+1)(2h+3)} =$$

$$= \frac{h(h+1)}{2(2h+1)} + \frac{(h+1)^2}{(2h+1)(2h+3)} =$$

$$= \frac{h(h+1)(2h+3) + 2(h+1)^2}{2(2h+1)(2h+3)} =$$

$$= \frac{(h+1)(2h^2+3h+2h+2)}{2(2h+1)(2h+3)} = \frac{(h+1)(2h+1)(h+2)}{2(2h+1)(2h+3)} =$$

$$= \frac{(h+1)(h+2)}{2(2h+3)}$$

19. Demostrar por el principio de inducción

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Solución

Aplicando el procedimiento anterior, se comprueba que es cierta la igualdad para n = h + 1

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{h(h+1)} + \frac{1}{(h+1)(h+2)} = \frac{h+1}{h+2}$$

20. Indicar cuáles de las siguientes expresiones son ciertas en N

1) $\sqrt{abc} = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$

2) $\sqrt{abc} = \sqrt{a} \times \sqrt{bc}$

3) $\sqrt{abc} = \sqrt{ab} \times \sqrt{ac}$

4) $\sqrt{a(b+c)} = \sqrt{ab} + \sqrt{ac}$

5) $\sqrt{(a+b)(c+d)} = \sqrt{(a+b)c} + \sqrt{(a+b)d}$

6) $\sqrt{(a+b)(c+d)} = \sqrt{a+b} \times \sqrt{c+d}$

7) $\sqrt{(a+b)(c+d)} = \sqrt{a+b} \times \sqrt{c} + \sqrt{a+b} \times \sqrt{d}$

8) $\sqrt{(a+b)(c+d)} = \sqrt{(a+b)c + (a+b)d}$

Solución

Aplicando las propiedades de la radicación de números naturales, son ciertas las siguientes expresiones

$$\sqrt{abc} = \sqrt{a} \times \sqrt{bc}$$

$$\sqrt{(a+b)(c+d)} = \sqrt{a+b} \times \sqrt{c+d}$$

$$\sqrt{(a+b)(c+d)} = \sqrt{(a+b)c + (a+b)d}$$

21. Indicar cuáles de las siguientes expresiones son correctas en N

1) $\sqrt{(a+b)c} = \sqrt{a+b} \times \sqrt{c}$

2) $\sqrt{(a+b)c} = (\sqrt{a} + \sqrt{b}) \times \sqrt{c}$

3) $\sqrt{(a+b)c} = \sqrt{c} \times \sqrt{a+b}$

4) $\sqrt{(a+b)c} = \sqrt{ac} + \sqrt{bc}$

5) $\sqrt{a(b^2 \times c)} = \sqrt{ab^2} \times \sqrt{ac}$

6) $\sqrt{a(b^2 \times c)} = \sqrt{ab^2} \times \sqrt{c}$

7) $\sqrt{a(b^2 \times c)} = bc\sqrt{a}$

8) $\sqrt{a(b^2 \times c)} = b\sqrt{a}\sqrt{c}$

Solución

Son correctas *1)*, *3)*, *6)* y *8)*.

22. Indicar cuáles de las siguientes expresiones son ciertas en N

1) $\sqrt{a(m+n)^2} = \sqrt{a}(m+n)$

2) $\sqrt{a(m+n)^2} = a(m+n)$

3) $\sqrt{a(m+n)^2} = m\sqrt{a} + n\sqrt{a}$

4) $\sqrt{a(m+n)^2} = \sqrt{am} + \sqrt{an}$

5) $\sqrt{ab(m+n)} = \sqrt{abm} + \sqrt{abn}$

6) $\sqrt{ab(m+n)} = \sqrt{ab} \times \sqrt{m+n}$

Solución

Son ciertas

$$\sqrt{a(m+n)^2} = \sqrt{a}(m+n) = m\sqrt{a} + n\sqrt{a}$$

$$\sqrt{ab(m+n)} = \sqrt{ab} \times \sqrt{m+n}$$

23. Indicar cuáles de las siguientes expresiones son ciertas en N

1) $\sqrt{ab - ac} = \sqrt{ab} - \sqrt{ac}$

2) $\sqrt{ab - ac} = \sqrt{a} \times \sqrt{b - c}$

3) $\sqrt{ab - ac} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} - \sqrt{a} \times \sqrt{c}$

4) $\sqrt{ab - ac} = \sqrt{b - c} \times \sqrt{a}$

5) $\sqrt{ab(p+q)} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}(\sqrt{p} + \sqrt{q})$

6) $\sqrt{ab(p+q)} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{p+q}$

Solución

Son ciertas *2)*, *4)* y *6)*.

5. Sistemas de numeración

CONCEPTOS TEORICOS

— **Expresión de un número natural n en una base B > 1.**

$$n = c_k\, B^k + r_k\, B^{k-1} + r_{k-1}\, B^{k-2} + \dots + r_3\, B^2 + r_2\, B + r_1$$

Siendo $r_1, r_2, \dots, r_k$ los restos sucesivos obtenidos al dividir por B el número n y c_k el último cociente.

— **Otra forma de expresarlo**

$$n = c_k\, r_k\, r_{k-1} \dots r_3\, r_2\, r_{1(B}$$

Siendo r_1 = unidad de primer orden
r_2 = unidad de segundo orden
....

— **En una base B > 1**

Cada B unidades de primer orden hacen 1 de segundo orden
Cada B unidades de segundo orden hacen 1 de tercer orden
....

Cuando la base B es mayor que 9 se utilizan

$$10 = \alpha$$

$$11 = \beta$$

$$12 = \gamma$$

......

PROBLEMAS

1. Dado el número $234501_{(6}$ expresarlo

a) En base decimal
b) En base 3
c) En base 8

Solución

a) Teniendo en cuenta que un número n expresado en base B se escribe:

$$n = r_1 + Br_2 + B^2 r_3 + B^3 r_4 + \ldots$$

resulta

$$234501 = 1 + 6 \times 0 + 6^2 \times 5 + 6^3 \times 4 + 6^4 \times 3 + 6^5 \times 2 =$$
$$= 20485$$

b) Pasamos de base 10 a base 3 obteniendo los restos sucesivos.

```
20485 |3
 24    6828 |3
  08    08   2276 |3
  25    22    17   758 |3
   1    18    26   15   252 |3
         0     2   08    12  84 |3
                    2     0  24  28 |3
                              0   1  9 |3
                                     0  3 |3
                                        0  1
```

Por tanto $234501_{(6} = 20.485 = 1001002201_{(3}$

c) Pasamos de base 10 a base 8 obteniendo los restos sucesivos.

```
20485 |8
 44    2560 |8
  48    16   320 |8
  05    00    00  40 |8
                   0  5
```

$234501_{(6} = 20485 = 50005_{(8}$

2. Dado el número 325476 expresado en base decimal, se pide expresarlo

a) En base 5
b) En base 12
c) En base 8

Solución

Aplicando el procedimiento anterior, resulta:

a) $325476 = 40403401_{(5}$
b) $325476 = 138430_{(12}$
c) $325476 = 1173544_{(8}$

3. Efectuar en las bases que se indican, las siguientes sumas

a)

$$\begin{array}{r} 2143012_{(5} \\ +\ 1212034_{(5} \\ \hline \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r} 4267023_{(8} \\ +\ 5602347_{(8} \\ 5762314_{(8} \\ \hline \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{r} 4569\alpha321_{(11} \\ +\ 25761430_{(11} \\ 5672\alpha3\alpha4_{(11} \\ \hline \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{r} 250234_{(6} \\ 302345_{(6} \\ +\ 103210_{(6} \\ 543210_{(6} \\ \hline \end{array}$$

Solución

a)

$$\begin{array}{r} 2143012_{(5} \\ +\ 1212034_{(5} \\ \hline 3410101_{(5} \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r} 4267023_{(8} \\ +\ 5602347_{(8} \\ 5762314_{(8} \\ \hline 20053706_{(8} \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{r} 4569\alpha321_{(11} \\ +\ 25761430_{(11} \\ 5672\alpha3\alpha4_{(11} \\ \hline 116\alpha80045_{(11} \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{r} 250234_{(6} \\ 302345_{(6} \\ +\ 103210_{(6} \\ 543210_{(6} \\ \hline 2043443_{(6} \end{array}$$

4. Efectuar en las bases que se indican las siguientes sumas:

a)

$$\begin{array}{r} 423503_{(7} \\ +\ 264235_{(7} \\ \hline \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r} 274513_{(9} \\ +\ 263027_{(9} \\ 321055_{(9} \\ \hline \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{r} 42\alpha1508_{(12} \\ +\ 29\beta3\alpha17_{(12} \\ 15423\alpha\beta_{(12} \\ \hline \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{r} 101021_{(3} \\ 102122_{(3} \\ +\ 220122_{(3} \\ 112211_{(3} \\ \hline \end{array}$$

Solución

a) $1021041_{(7}$
b) $868606_{(9}$
c) $8617712_{(12}$
d) $2021100_{(3}$

5. Efectuar en las bases que se indican, las siguientes restas

a)

$$\begin{array}{r} 4236207_{(8} \\ -\ 2345052_{(8} \\ \hline \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r} \alpha5732\beta8_{(12} \\ -\ 168932\beta_{(12} \\ \hline \end{array}$$

Solución

a)

$$\begin{array}{r} 4236207_{(8} \\ -\ 2345052_{(8} \\ \hline 1671135_{(8} \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r} \alpha 5732\beta 8_{(12} \\ -\ 168932\beta_{(12} \\ \hline 8\alpha\alpha 5\beta 89_{(12} \end{array}$$

6. Efectuar en las bases que se indican, las siguientes restas:

a)

$$\begin{array}{r} 84576230_{(9} \\ -\ 35276254_{(9} \\ \hline \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r} 6253205_{(7} \\ -\ 1432654_{(7} \\ \hline \end{array}$$

Solución

a) $48288865_{(9}$
b) $4520221_{(7}$

7. Efectuar en las bases que se indican, las siguientes multiplicaciones

a)

$$\begin{array}{r} 2350427_{(8} \\ \times\ 65_{(8} \\ \hline \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r} 2130213_{(4} \\ \times\ 213_{(4} \\ \hline \end{array}$$

Solución

a)

$$\begin{array}{r} 2350427_{(8} \\ \times\ 65_{(8} \\ \hline 14212563 \\ 16563212 \\ \hline 202044703_{(8} \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r} 2130213_{(4} \\ \times\ 213_{(4} \\ \hline 13111311 \\ 2130213 \\ 10321032 \\ \hline 1133123301_{(4} \end{array}$$

8. Efectuar en las bases que se indican, las siguientes multiplicaciones

a)

$$\begin{array}{r} 432013_{(5} \\ \times\ 24_{(5} \\ \hline \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r} 27804315_{(9} \\ \times\ 467_{(9} \\ \hline \end{array}$$

Solución

a) $23023422_{(5}$
b) $14606461648_{(9}$

9. Efectuar en las bases que se indican las siguientes divisiones:

a)

$120210_{(3} \,\underline{|\, 2_{(3}}$

b)

$254610_{(7} \,\underline{|\, 53_{(7}}$

Solución

a)

$$\begin{array}{l|l} \;\;120210_{(3} & 2_{(3} \\ \cline{2-2} -11 & 21220 \\ \cline{1-1} \;\;\;10 & \\ \;\;-2 & \\ \cline{1-1} \;\;\;\;12 & \\ \;\;-11 & \\ \cline{1-1} \;\;\;\;\;11 & \\ \;\;\;-11 & \\ \cline{1-1} \;\;\;\;000 & \end{array}$$

$2_{(2} \times 1 = 2_{(2}$

$2_{(2} \times 2 = 11_{(2}$

Cociente $= 21220_{(3}$
Resto $= 0_{(3}$

b)

$$
\begin{array}{l|l}
\;\;2546210_{(7} & 53_{(7} \\ \cline{2-2}
-222 & 34255 \\ \cline{1-1}
\;\;\;326 & \\
\;\;-305 & \\ \cline{1-1}
\;\;\;\;212 & \\
\;\;\;-136 & \\ \cline{1-1}
\;\;\;\;\;431 & \\
\;\;\;\;-361 & \\ \cline{1-1}
\;\;\;\;\;\;400 & \\
\;\;\;\;\;-361 & \\ \cline{1-1}
\;\;\;\;\;\;\;\;\;6 &
\end{array}
$$

$53_{(7} \times 1 = 53_{(7}$
$53_{(7} \times 2 = 136_{(7}$
$53_{(7} \times 3 = 222_{(7}$
$53_{(7} \times 4 = 305_{(7}$
$53_{(7} \times 5 = 361_{(7}$
$53_{(7} \times 6 = 444_{(7}$

Cociente $= 34255_{(7}$
Resto $= 6_{(7}$

10. Efectuar en las bases que se indican, las siguientes divisiones:

a) $5621203_{(7} \;\underline{|\, 5_{(7}}$

b) $2132425_{(6} \;\underline{|\, 34_{(6}}$

Solución

a) Cociente $= 1115600_{(7}$ y resto $= 3_{(7}$
b) Cociente $= 34114_{(6}$ y resto $= 21_{(6}$

11. Calcular en base $n > 3$ el cubo de $aa_{(n}$ siendo:

$$a = n - 1,\; b = n - 2 \text{ y } c = n - 3$$

Solución

$$aa_{(n} = an + a = (n - 1)\,n + (n - 1) = n^2 - n + n - 1 = n^2 - 1$$

$$[aa_{(n}]^3 = (n^2 - 1)^3 = n^6 - 3n^4 + 3n^2 - 1 =$$

$$= (\text{Sumando y restando } n \text{ y } n^5) =$$

$$= n^6 - n^5 + n^5 - 3n^4 + 2n^2 + n^2 - n + n - 1 =$$

$$= n^5(n-1) + n^4(n-3) + n^3 \times 0 + n^2 \times 2 + n(n-1) + (n-1) =$$

$$= an^5 + cn^4 + 0 \times n^3 + 2n^2 + an + a = ac02aa_{(n}$$

12. En un sistema de numeración de base n con las cifras

$$a = n - 1,\ b = n - 2 \text{ y } c = n - 3\ (n > 3)$$

Demostrar:

1) $a^2 = b1_{(n}$
2) $a^3 = c2a_{(n}$
3) $a \times b = c2_{(n}$

Solución

1) $a^2 = (n-1)^2 = n^2 - 2n + 1 = n(n-2) + 1 = b1_{(n}$

2) $a^3 = (n-1)^3 = n^3 - 3n^2 + 3n - 1 = n^2(n-3) + 2n + (n-1) =$

$= c2a_{(n}$

3) $a \times b = (n-1)(n-2) = n^2 - 3n + 2 = n(n-3) + 2 = c2_{(n}$

13. Determinar el sistema de numeración, de base menor que 10, en el cual la diferencia entre el número formado por cinco cifras consecutivas escritas de mayor a menor y el formado por las mismas cinco cifras en orden inverso es $4\,1\,6\,4\,3_{(n}$ y calcular ese número. Comprobar que, encontrando n, hay dos valores para el número

Solución

El número está formado por:

$$e\,d\,c\,b\,a_{(n} \quad \text{siendo} \quad \begin{aligned} b &= a + 1 \\ c &= a + 2 \\ d &= a + 3 \\ e &= a + 4 \end{aligned}$$

Por tanto

$$edcba_{(n} - abcde_{(n} = 41643_{(n}$$

desarrollando

$$(a + bn + cn^2 + dn^3 + en^4) - (e + dn + cn^2 + bn^3 + an^4) =$$
$$= 3 + 4n + 6n^2 + n^3 + 4n^4$$
$$[a + (a + 1)\,n + (a + 2)\,n^2 + (a + 3)\,n^3 + (a + 4)\,n^4] -$$
$$- [(a + 4) + (a + 3)\,n + (a + 2)\,n^2 + (a + 1)\,n^3 + an^4] =$$
$$= 3 + 4n + 6n^2 + n^3 + 4n^4$$

Operando resulta:

$$a + an + n + an^2 + 2n^2 + an^3 + 3n^3 + an^4 + 4n^4 -$$
$$- a - 4 - an - 3n - an^2 - 2n^2 - an^3 - n^3 - an^4 - =$$
$$= 3 + 4n + 6n^2 + n^3 + 4n^4$$

de donde:

$$n^3 - 6n^2 - 6n - 7 = 0$$

Por Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -6 & -6 & -7 \\ 7) & & 7 & 7 & 7 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$n^2 + n + 1 = 0 \Rightarrow n = \text{raíces imaginarias}$$

La base es $n = 7$

Dando valores a a se tiene:

— Para $a = 1 \Rightarrow e\,d\,c\,b\,a_{(7} = 54321_{(7}$
— Para $a = 2 \Rightarrow e\,d\,c\,b\,a_{(7} = 65432_{(7}$

Estas son las dos soluciones que existen ya que para $a = 3$ resultaría $e = 7$, cosa imposible por estar el número dado en base 7.

14. ¿Cuál es el último número de la tabla de sumar y el de la tabla de multiplicar en el sistema de base B? Aplicarlo para $B = 7$.

Solución

a) Suma: $(B - 1) + (B - 1) = B + (B - 2) = 1\,(\underline{B - 2})_{(B}$

b) Producto: $(B-1)\times(B-1) = B^2 - 2B + 1 = B(B-2) + 1 =$

$= (\underline{B-2})\,1_{(B}$

En base $B = 7$

a) Suma : $6 + 6 = 15_{(7}$

b) Producto : $6 \times 6 = 51_{(7}$

15. Determinar todos los números que en el sistema decimal se escriben con tres cifras y que en el sistema de base 7 tiene también tres cifras, respectivamente dobles de aquellas.

Solución

Sea el número $N = c\,b\,a_{(10}$ que en base 7 es

$$N = (2c)\,(2b)\,(2a)_{(7}$$

Desarrollando

$$a + 10b + 10^2c = 2a + (2b)\,7 + (2c)\,7^2$$

$$a + 10b + 100c = 2a + 14b + 98c$$

de donde

$$a = 2c - 4b = 2\,(c - 2b)$$

Resulta que $a = \dot{2}$ pero su doble tiene que ser inferior a 7, por tanto sólo puede ocurrir que $a = 0$ o $a = 2$.

$$\text{— Si } a = 0 \Rightarrow c = 2b \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \text{ y } c = 2 \\ b = 2 \text{ y } c = 4 \\ b = 3 \text{ y } c = 6 \end{cases}$$

$$\text{— Si } a = 2 \Rightarrow c = 2b + 1 \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \text{ y } c = 1 \\ b = 1 \text{ y } c = 3 \\ b = 2 \text{ y } c = 5 \end{cases}$$

Las soluciones posibles son:

$$
\begin{aligned}
&1)\ N = 210_{(10}\\
&2)\ N = 420_{(10}\\
&3)\ N = 102_{(10}\\
&4)\ N = 312_{(10}\\
&5)\ N = 522_{(10}\\
&6)\ N = 630_{(10}
\end{aligned}
$$

de las que sólo son válidas primera, tercera y cuarta pues al tomar de la segunda, quinta y sexta el doble para expresarlo en base 7 resultan superiores a la base.

Las soluciones son:

$$
\begin{aligned}
N &= 210_{(10} = 420_{(7}\\
N &= 102_{(10} = 204_{(7}\\
N &= 312_{(10} = 624_{(7}
\end{aligned}
$$

16. El número 51 escrito en una cierta base x equivale al número 44 en una base que tiene una unidad más. Hallar a qué número equivale en base decimal.

Solución

$$51_{(x} = 44_{(x+1}$$

$$1 + 5x = 4 + 4\,(x + 1) \Rightarrow x = 7$$

$$51_{(7} = 44_{(8} = 36$$

17. Un mismo número N expresado en un sistema de numeración de base n está representado por 435 y expresado en base n + 1 está representado por 326. Determinar n y la expresión del número en el sistema decimal.

Solución

$$N = 435_{(n} = 326_{(n+1}$$

$$5 + 3n + 4n^2 = 6 + 2\,(n + 1) + 3\,(n + 1)^2$$

$$n^2 - 5n - 6 = 0 \Rightarrow n = 6 \text{ y } n = -1$$

La base es n = 6

Por tanto

$$N = 435_{(6} = 5 + 3 \times 6 + 4 \times 6^2 = 167$$

18. ¿En qué base de numeración se verifica $2311 = 43^2$?

Solución

Llamando n a la base

$$2311_{(n} = [43_{(n}]^2$$

$$1 + n + 3n^2 + 2n^3 = [3 + 4n]^2$$

$$2n^3 - 13n^2 - 23n - 8 = 0$$

$$n = 8, n = -1 \text{ y } n = -\frac{1}{2}$$

La base es $n = 8$

19. Los números 123, 140 y 156 están en progresión aritmética. Hallar en qué base están escritos dichos números.

Solución

$$123 = 140 - r$$
$$156 = 140 + r$$

$$123 + 156 = 140 + 140 = 2 \times 140$$

En base n se tiene

$$123_{(n} + 156_{(n} = 2 \times 140_{(n}$$

$$(3 + 2n + n^2) + (6 + 5n + n^2) = 2 \times (4n + n^2)$$

$$n = 9$$

La base es $n = 9$

20. Hallar la base del sistema en el que el número 551 representa el cuadrado de 23.

Solución

$$551_{(x} = [23_{(x}]^2$$

$$x = 8 \text{ y } x = -1$$

La base es $x = 8$.

21. Un número de tres cifras en el sistema de base 7 tiene sus cifras invertidas cuando se le expresa en base 9. ¿Cuál es el número?

Solución

El número en base 7 es $N = cba_{(7}$
El número en base 9 es $N = abc_{(9}$

Se tiene

$$cba_{(7} = abc_{(9}$$

$$a + 7b + 7^2c = c + 9b + 9^2a$$

$$80a + 2b = 48c$$

$$b = 24c - 40a = 8\,(3c - 5a)$$

Como a, b y c tienen que ser dígitos inferiores a 7

$$3c - 5a = 0 \Rightarrow c = 5 \quad y\ a = 3$$

El número es $N = 503_{(7} = 305_{(9}$

22. Se establece un sistema S de numeración cuyas cifras son las 26 letras del abecedario (no se incluye ch, ll, w) con las siguientes equivalencias:

$$a = 0,\ b = 1,\ c = 2,\ d = 3,\ \ldots,\ y = 24,\ z = 25$$

Se pide:

1) Representar en dicho sistema el número 1947 escrito en el sistema decimal.

2) Expresar en el sistema decimal y en el sistema de base 8 el número expresado en el sistema S por: «país».

Solución

1) $1947 = cvx_{(26}$

2) país $_{(26} = 19 + 8 \times 26 + 0 \times 26^2 + 16 \times 26^3 = 281.443$

23. Reconocer que el número $A = 13542_{(n}$ es divisible por el número $B = 122_{(n}$ para todo valor de $n > 5$. Encontrar el cociente $A : B$.

Solución

$$A = 13542_{(n} = 2 + 4n + 5n^2 + 3n^3 + n^4$$

$$B = 122_{(n} = 2 + 2n + n^2$$

$$A : B = (n^4 + 3n^3 + 5n^2 + 4n + 2) : (n^2 + 2n + 2)$$

Dividiendo

$$A : B = n^2 + n + 1 = 111_{(n}$$

Podemos poner que

$$(n^4 + 3n^3 + 5n^2 + 4n + 2) = (n^2 + 2n + 2)(n^2 + n + 1)$$

$$13542_{(n} = 122_{(n} \times 111_{(n}$$

Luego

$$A : B = 13542_{(n} : 122_{(n} = 111_{(n} \; (n > 5)$$

6. Divisibilidad en N

CONCEPTOS TEORICOS

— **Múltiplo:** Dados a, b $\in$ N, $a = \dot{b}$ si $\exists\, n \in N \mid a = bn$

— **Divisor:** Dados a, b $\in$ N, a/b si $\exists\, p \in N \mid b = ap$

— **Expresión de un número n descompuesto en factores primos**

$$n = p_1^{\alpha 1}\ p_2^{\alpha 2} \dots p_r^{\alpha r}$$

— **Número de divisores de n:** $N = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_r + 1)$

— **Máximo común divisor (D)** de dos números es el mayor de sus divisores comunes.

— **Mínimo común múltiplo (M)** de dos números es el menor de sus múltiplos comunes.

— **Teorema fundamental:** $M \times D = a \times b$

— **Algoritmo de Euclides:** D (a, b) = D (b, r) siendo $a = bq + r$

— **Números congruentes:** Dados a, b $\in$ N y m $\in$ N

$$a \equiv b\ (m) \Leftrightarrow a - b = \dot{m}$$

a y b son congruentes si dan el mismo resto al ser divididos por m.

— **Restos potenciales:** Los restos que se obtienen al dividir las potencias de un número B por otro m se llama restos potenciales de base B respecto al módulo m.

— **Criterio general de divisibilidad:** Todo número natural n escrito en base B puede expresarse

$$n \equiv u_1 + u_2 r_1 + u_3 r_2 + \dots + u_k r_{k-1} + c_k r_k \ (m)$$

siendo u_i las unidades de distinto orden y r_i los restos potenciales módulo m.

Si el segundo miembro es divisible por m, el primero también lo será.

PROBLEMAS

1. Sean m y n dos números naturales, tales que $m > n$ y $m - n = \dot{10}$. Determinar dichos números sabiendo que $m^2 - n^2 = 1940$.

Solución

$$m^2 - n^2 = (m + n)(m - n) = 1940 = 2^2 \times 5 \times 97$$

Como $m - n = \dot{10}$ hacemos

$$m - n = 2 \times 5 = 10$$

$$m + n = 2 \times 97 = 194$$

ya que si $m > n \Rightarrow m + n > m - n$

Resolviendo el sistema

$$m = 102 \quad y \quad n = 92$$

2. Determinar a y b en el número natural N = aba siendo dicho número divisible por 3 y por 11.

Solución

$$\left.\begin{aligned} 2a + b &= \dot{3} \\ 2a - b &= 0 \end{aligned}\right\} \quad y \quad \left\{\begin{aligned} 2a + b &= \dot{3} \\ 2a - b &= 11 \end{aligned}\right.$$

De la primera $b = 2a \Rightarrow 4a = \dot{3}$ luego $a = 3$ y el número es $N = 363$.

Del sistema segundo $b = 2a - 11 \Rightarrow 4a - 11 = \dot{3}$ luego $a = 8$ y el número es $N = 858$.

3. Demostrar que siendo n un número natural cualquiera, la expresión $N = n^5 - n$ es múltiplo de 10.

Solución

Se tiene

$$N = n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 + 1)(n^2 - 1) =$$
$$= n(n^2 + 1)(n + 1)(n - 1) = (n - 1)\, n\, (n + 1)(n^2 + 1)$$

Por otra parte: $10 = 2 \times 5$.

Además $(n - 1), n, (n + 1)$ son tres números consecutivos, por lo que siempre hay un múltiplo de 2.

Para demostrar que $N = (n - 1)\, n\, (n + 1)(n^2 + 1)$ es múltiplo de 5, puede ocurrir:

— Que $n = \dot{5} \Rightarrow n^5 - n = \dot{5}$

— Que $n = \dot{5} + 1 \Rightarrow n - 1 = \dot{5}$

— Que $n = \dot{5} - 1 \Rightarrow n + 1 = \dot{5}$

— Que $n = \dot{5} + 2 \Rightarrow n^2 + 1 = (\dot{5} + 2)^2 + 1 = (\dot{5})^2 + 2 \times (\dot{5})\, 2 + 2^2 + 1 = \dot{5}$

— Que $n = \dot{5} - 2 \Rightarrow n^2 + 1 = (\dot{5} - 2)^2 + 1 = (\dot{5})^2 - 2\, (\dot{5})\, 2 + 2^2 + 1 = \dot{5}$

Por lo tanto $N = n^5 - n$ es múltiplo de 2 y de 5 resultando siempre múltiplo de 10 para cualquier número natural n.

4. Demostrar que siendo n un número natural cualquiera, la expresión $N = n(2n + 1)(7n + 1)$ es siempre múltiplo de 6.

Solución

Como $6 = 2 \times 3$ el número dado tiene que ser múltiplo de 2 y de 3.

1) Para ver que $N = n(2n+1)(7n+1) = \dot{2}$ puede ocurrir

a) $n = \dot{2}$ y *b)* $n = \dot{2} + 1$

a) Si $n = \dot{2} \Rightarrow n(2n+1)(7n+1) = \dot{2}(2n+1)(7n+1) = \dot{2}$

b) Si $n = \dot{2} + 1 \Rightarrow 7n + 1 = 7(\dot{2} + 1) + 1 = 7 \times \dot{2} + 7 + 1 = \dot{2}$

luego $N = n(2n+1)(7n+1) = \dot{2}$

2) Para ver que $N = n(2n+1)(7n+1) = \dot{3}$ puede ocurrir

a) $n = \dot{3}$, *b)* $n = \dot{3} + 1$ y *c)* $n = \dot{3} - 1$

a) Si $n = \dot{3} \Rightarrow n(2n+1)(7n+1) = \dot{3}(2n+1)(7n+1) = \dot{3}$

b) Si $n = \dot{3} + 1 \Rightarrow 2n + 1 = 2(\dot{3} + 1) + 1 = 2 \times \dot{3} + 2 + 1 = \dot{3}$

c) Si $n = \dot{3} - 1 \Rightarrow 7n + 1 = 7(\dot{3} - 1) + 1 = 7 \times \dot{3} - 7 + 1 = \dot{3}$

luego $N = n(2n+1)(7n+1) = \dot{3}$.

Como $N = n(2n+1)(7n+1)$ es múltiplo de 2 y de 3 resulta

$$N = n(2n+1)(7n+1) = \dot{6}$$

5. Dados los números 328 y 178, encontrar todos los módulos respecto de los cuales estos números son congruentes.

Solución

$$328 \equiv 178 \ (m)$$

$$328 - 178 = m \Rightarrow 150 \equiv \dot{m}$$

Por tanto m es un divisor de 150

$$150 = 2 \times 3 \times 5^2$$

luego

$$D(150) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 25, 30, 50, 75, 150\}$$

son los posibles valores que puede tomar m.

6. Dadas las congruencias

$$824 \equiv 128 \ (m)$$

$$465 \equiv 225 \ (m)$$

calcular los posibles valores de m.

Solución

$$\left.\begin{array}{l} 824 \equiv 128\ (m) \\ \\ 465 \equiv 225\ (m) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 824 - 128 = \dot{m} \\ \\ 465 - 225 = \dot{m} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 696 = \dot{m} \\ \\ 240 = \dot{m} \end{array}\right.$$

m será a la vez divisor de 696 y 240 por lo tanto será divisor de su m.c.d.

$$\text{m.c.d.}\ (696, 240) = 24 = 2^3 \times 3$$

Los divisores de 24 son

$$D\ (24) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

cualquiera de estos números es el valor de m.

7. Deducir el criterio de divisibilidad por 13 en el sistema decimal y determinar el valor que debe darse a la cifra «a» en la expresión 2345a78 para que resulte un número divisible por 13.

Solución

Por restos potenciales

$$10^0 \equiv 1\ (13)$$
$$10^1 \equiv 10 \equiv -3\ (13)$$
$$10^2 \equiv 9 \equiv -4\ (13)$$
$$10^3 \equiv 12 \equiv -1\ (13)$$
$$10^4 \equiv 3\ (13)$$
$$10^5 \equiv 4\ (13)$$
$$10^6 \equiv 1\ (13)$$

$$\begin{array}{l|l} 1000000 & 13 \\ \hline \ \ 90 & 76923 \\ \ \ 120 & \\ \ \ \ \ 30 & \\ \ \ \ \ \ 40 & \\ \ \ \ \ \ \ 1 & \end{array}$$

$$n \equiv u_1 + u_2 r_1 + u_3 r_2 + u_4 r_3 + \dots\ (m)$$

siendo $r_1, r_2, r_3, \ldots$ los restos potenciales módulo m

$$n \equiv u_1 - 3u_2 - 4u_3 - u_4 + 3u_5 + 4u_6 \ (13)$$

El número 2345a78 para que resulte divisible por 13 tiene que ocurrir

$$1 \times 8 - 3 \times 7 - 4a - 1 \times 5 + 3 \times 4 + 4 \times 3 + 1 \times 2 = \dot{13}$$

$$8 - 4a = \dot{13} \Rightarrow a = 2$$

El número es

2345278

8. Deducir el criterio de divisibilidad por 7 en el sistema decimal y determinar el valor que debe darse a la cifra «m» para que el número natural N = 429 m 15 sea divisible por 7.

Solución

Por restos potenciales

$$n \equiv u_1 + 3u_2 + 2u_3 - u_4 - 3u_5 - 2u_6 + u_7 \ (7)$$

$$1 \times 5 + 1 \times 3 + 2m - 1 \times 9 - 3 \times 2 - 2 \times 4 = \dot{7} \Rightarrow m = 4$$

El número pedido es

$$N = 429415$$

9. Dado el número N = bbaa, se pide:

1) Demostrar que N es divisible por 11

2) Calcular el cociente N : 11

3) Expresar la igualdad que relaciona a y b para que el cociente N : 11 sea también divisible por 11.

Solución

1) El número N = bbaa es divisible por 11, pues

$$(a + b) - (a + b) = 0$$

la diferencia entre los números que ocupan lugar par y los que ocupan lugar impar es cero

2) El cociente N : 11 se obtiene así:

$$N = a + 10a + 100b + 1000b = 11a + 1100b = 11\,(a + 100b)$$

$$N : 11 = a + 10^2b = b0a$$

3) N : 11 = b0a y este número será divisible por 11 si

$$a + b = 11$$

10. Calcular todos los números de la forma N = aba que sean divisibles al mismo tiempo por 3 y por 5.

Solución

Para que sea divisible por 5 el número N debe acabar en 0 o en 5 pero a no puede ser 0 pues el número tendría sólo dos cifras. Por tanto los números a encontrar son de la forma

$$N = 5b5$$

Para que sea divisible por 3

$$5 + b + 5 = \dot{3} \Rightarrow 10 + b = \dot{3} \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ b = 5 \\ b = 8 \end{cases}$$

Los números pedidos son

$$N = 525$$

$$N = 555$$

$$N = 585$$

11. Determinar los dígitos a y b para que el número $ab23b1 = \dot{33}$

Solución

$$\text{Si } ab23b1 = \dot{33} \Rightarrow \begin{cases} ab23b1 = \dot{11} \\ ab23b1 = \dot{3} \end{cases}$$

— Para que el número dado sea múltiplo de 11

$$(a + 2 + b) - (b + 3 + 1) = \dot{11}$$

$$a - 2 = \dot{11} \Rightarrow \begin{cases} a - 2 = 0 \\ a - 2 = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = 13 \text{ (imposible)} \end{cases}$$

— Para que el número dado sea múltiplo de 3

$$a + b + 2 + 3 + b + 1 = \dot{3} \Rightarrow a + 2b + 6 = \dot{3}$$

como a = 2 resulta

$$2 + 2b + 6 = \dot{3} \Rightarrow 2b + 8 = \dot{3}$$

Puede ocurrir

$$2b + 8 = 3 \Rightarrow b = \frac{5}{2} \notin N \text{ (imposible)}$$

$$2b + 8 = 6 \Rightarrow b = -1 \in N \text{ (imposible)}$$

$$2b + 8 = 9 \Rightarrow b = \frac{1}{2} \notin N \text{ (imposible)}$$

$$2b + 8 = 12 \Rightarrow b = 2$$

$$2b + 8 = 15 \Rightarrow b = \frac{7}{2} \notin N \text{ (imposible)}$$

$$2b + 8 = 18 \Rightarrow b = 5$$

$$2b + 8 = 21 \Rightarrow b = \frac{13}{2} \notin N \text{ (imposible)}$$

$$2b + 8 = 24 \Rightarrow b = 8$$

$$2b + 8 = 27 \Rightarrow b = \frac{19}{2} \notin N \text{ (imposible)}$$

$$2b + 8 = 30 \Rightarrow b = 11 \in N \text{ (imposible por tener 2 dígitos)}$$

Los números son

222321, 252351, 282381

12. Hallar un número que contenga sólo como factores primos el 2 y el 3 y tal que el número de sus divisores sea la tercera parte del total de divisores que tiene el cuadrado de dicho número.

Solución

El número pedido es $n = 2^x 3^y$ que tiene de número de divisores $N = (x + 1)(y + 1)$

El cuadrado del número es $n^2 = 2^{2x} 3^{2y}$ y el número de divisores es

$$\overline{N} = (2x + 1)(2y + 1)$$

Se cumple que

$$\frac{\overline{N}}{3} = N \Rightarrow \overline{N} = 3N$$

Por tanto

$$(2x + 1)(2y + 1) = 3(x + 1)(y + 1)$$
$$4xy + 2x + 2y + 1 = 3xy + 3x + 3y + 3$$
$$xy = x + y + 2$$

dando valores

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	–	4	–	2	–	–	–	–	–	–

Por tanto

$$x = 2 \quad y = 4$$
$$x = 4 \quad y = 2$$

Los números son

$$n = 2^2 \times 3^4 = 324$$
$$n = 2^4 \times 3^2 = 144$$

13. Hallar un número que tenga tres factores primos y 24 divisores, ¿cuántos números hay menores de 1000 que cumplan estas condiciones? Escríbelos.

Solución

$$n = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma}$$

$$N = (\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1) = 24 = 2^3 \times 3$$

Puede ocurrir

$$24 = 2 \times 3 \times 4 \Rightarrow \alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 3$$

$$24 = 2 \times 2 \times 6 \Rightarrow \alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 5$$

Los números son de la forma

$$n = a \times b^2 \times c^3$$

$$n = a \times b \times c^5$$

— Tomando los primos 2, 3 y 5

$n = 2 \times 3^2 \times 5^3 > 1000$ $\quad$ $n = 2^3 \times 3 \times 5^2 = 600$

$n = 2 \times 3^3 \times 5^2 > 1000$ $\quad$ $n = 2 \times 3 \times 5^5 > 1000$

$n = 2^3 \times 3^2 \times 5 = 360$ $\quad$ $n = 2^5 \times 3 \times 5 = 480$

$n = 2^2 \times 3^3 \times 5 = 540$ $\quad$ $n = 2 \times 3^5 \times 5 > 1000$

$n = 2^2 \times 3 \times 5^3 > 1000$

— Tomando los primos 2, 3 y 7

$n = 2 \times 3^2 \times 7^3 > 1000$ $\quad$ $n = 2^3 \times 3 \times 7^2 > 1000$

$n = 2 \times 3^3 \times 7^2 > 1000$ $\quad$ $n = 2 \times 3 \times 7^5 > 1000$

$n = 2^2 \times 3^3 \times 7 = 756$ $\quad$ $n = 2^5 \times 3 \times 7 = 672$

$n = 2^3 \times 3^2 \times 7 = 504$ $\quad$ $n = 2 \times 3^5 \times 7 > 1000$

$n = 2^2 \times 3 \times 7^3 > 1000$

— Tomando los primos 3, 5 y 7

$n = 3 \times 5^2 \times 7^3 > 1000$ $\quad$ $n = 3^3 \times 5 \times 7^2 > 1000$

$n = 3 \times 5^3 \times 7^2 > 1000$ $\quad$ $n = 3 \times 5 \times 7^5 > 1000$

$n = 3^2 \times 5^3 \times 7 > 1000$ $\quad$ $n = 3^5 \times 5 \times 7 > 1000$

$n = 3^3 \times 5^2 \times 7 > 1000$ $\quad$ $n = 3 \times 5^5 \times 7 > 1000$

$n = 3^2 \times 5 \times 7^3 > 1000$

Tomando los primos 2, 5 y 7 todos los números son mayores de 1000.

Por tanto los números naturales menores que 1000 que tienen tres factores primos son

360, 480, 504, 540, 600, 672 y 756

14. El número $n = 2^x \times 3^y \times 5^z$ pierde 24 divisores al dividirlo por 2, pierde 18 divisores si se divide por 3 y pierde 12 divisores si se divide por 5. Hallar dicho número.

Solución

$n = 2^x \times 3^y \times 5^z$ $\quad$ $N = (x + 1)(y + 1)(z + 1)$

$n_1 = \dfrac{n}{2} = 2^{x-1} \times 3^y \times 5^z$ $\quad$ $N_1 = x(y + 1)(z + 1)$

$n_2 = \dfrac{n}{3} = 2^x \times 3^{y-1} \times 5^z$ $\quad$ $N_2 = (x + 1)\, y\,(z + 1)$

$n_3 = \dfrac{n}{5} = 2^x \times 3^y \times 5^{z-1}$ $\quad$ $N_3 = (x + 1)(y + 1)\, z$

$$N_1 = N - 24$$
$$N_2 = N - 18$$
$$N_3 = N - 12$$

de donde:

$$x(y+1)(z+1)+24=(x+1)(y+1)(z+1)$$
$$(x+1)y(z+1)+18=(x+1)(y+1)(z+1)$$
$$(x+1)(y+1)z+12=(x+1)(y+1)(z+1)$$

operando:

$$xyz+xy+xz+x+24=xyz+xz+yz+z+xy+x+y+1$$
$$xyz+xy+yz+y+18=xyz+xz+yz+z+xy+x+y+1$$
$$xyz+xz+yz+z+12=xyz+xz+yz+z+xy+x+y+1$$

simplificando

$$24=yz+z+y+1=(y+1)(z+1)$$
$$18=xz+z+x+1=(x+1)(z+1) \qquad (*)$$
$$12=xy+x+y+1=(x+1)(y+1)$$

dividiendo miembro a miembro

$$\frac{24}{12}=\frac{(y+1)(z+1)}{(x+1)(y+1)} \Rightarrow (z+1)=2(x+1) \quad (1)$$

$$\frac{18}{12}=\frac{(x+1)(z+1)}{(x+1)(y+1)} \Rightarrow 2(z+1)=3(y+1) \quad (2)$$

$$\text{De (1) y } (*) \left\{ \begin{array}{l} x+1=3 \\ \\ z+1=6 \end{array} \right. \Rightarrow x=2,\ z=5$$

Sustituyendo en (2) $\Rightarrow y+1=4 \Rightarrow y=3$

Por tanto

$$n=2^x \times 3^y \times 5^z=2^2 \times 3^3 \times 5^5$$

15. Hallar todas las parejas de números naturales tales que su producto sea 3.024 y su mínimo común múltiplo 504.

Solución

$$\left.\begin{array}{l} a = a' D \\ b = b' D \end{array}\right\} \quad ab = D \times M$$

$$3.024 = D \times 504 \Rightarrow D = \frac{3.024}{504} = 6$$

Por tanto

$$ab = a' D b' D = a' b' \times 6 \times 6 = 3.024$$

$$a' b' = \frac{3.024}{36} = 84$$

$$84 = 2^2 \times 3 \times 7$$

a'	1	3	4	7
b'	84	28	21	12

de donde

$a = 6$	$a = 18$	$a = 24$	$a = 42$
$b = 504$	$b = 168$	$b = 126$	$b = 72$

16. El mínimo común múltiplo de dos números es 1260 y la suma de sus cuadrados es 39.456. Hallar dichos números.

Solución

Llamamos: $a = a' D$
$b = b' D$

m. c. d. $(a', b') = 1$

Se tiene

$$a^2 + b^2 = a'^2 \times D^2 + b'^2 \times D^2 = (a'^2 + b'^2) \times D^2 = 39.456$$

Por otra parte

$$ab = M \times D$$

$$a' \times D \times b' \times D = M \times D$$

$$a' \times b' \times D = M = 1.260 \ (*)$$

Dividiendo $a^2 + b^2$ por el cuadrado de (*) resulta

$$\frac{a^2 + b^2}{a'^2 b'^2 D^2} = \frac{(a'^2 + b'^2) D^2}{a'^2 b'^2 D^2} = \frac{a'^2 + b'^2}{a'^2 b'^2} = \frac{39.456}{1.260^2} = \frac{274}{11.025}$$

Como m. c. d. $(a', b') = 1$

$$\left.\begin{array}{l} a'^2 + b'^2 = 274 \\ \\ a'^2 \times b'^2 = 11025 \end{array}\right\} \frac{11.025}{b'^2} + b'^2 = 274$$

$$b'^4 - 274b'^2 + 11025 = 0$$

$$b'^2 = 49 \Rightarrow b' = \pm 7 \text{ siendo válida } b' = 7$$

Si $b' = 7 \Rightarrow a'^2 = 225 \Rightarrow a' = \pm 15$ siendo válida $a' = 15$

Sustituyendo en (*)

$$a' \times b' \times D = 1260 \Rightarrow D = \frac{1.260}{7 \times 15} = 12$$

Los números son

$$a = a' \times D = 15 \times 12 = 180$$

$$b = b' \times D = 7 \times 12 = 84$$

17. Determinar dos números naturales sabiendo que su m. c. d. es la diferencia de los mismos y su m. c. m. es 60.

Solución

Los números son a y b siendo $a > b$

m. c. d. $(a, b) = D = a - b$

m. c. m. $(a, b) = M = 60$

Se tiene:

$$\begin{array}{l} a = a' D = a' (a - b) \\ \underline{b = b' D = b' (a - b)} \\ a - b = (a' - b')(a - b) \Rightarrow 1 = a' - b' \Rightarrow a' = b' + 1 \end{array}$$

Aplicando la igualdad fundamental

$$a \times b = D \times M$$

$$M = \frac{ab}{D} = \frac{a' D b' D}{D} = a' b' D = (b' + 1) b' D = 60$$

Los divisores de 60 son

$$D(60) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$$

Por tanto de todos ellos

$$(b' + 1) b' = 2 \times 1 \Rightarrow D = 30$$

$$(b' + 1) b' = 3 \times 2 \Rightarrow D = 10$$

$$(b' + 1) b' = 4 \times 3 \Rightarrow D = 5$$

$$(b' + 1) b' = 5 \times 4 \Rightarrow D = 3$$

$$(b' + 1) b' = 6 \times 5 \Rightarrow D = 2$$

Los posibles números son:

$$\begin{cases} a = a' D = (b' + 1) D = 2 \times 30 = 60 \\ b = b' D = 1 \times 30 = 30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = a' D = (b' + 1) D = 3 \times 10 = 30 \\ b = b' D = 2 \times 10 = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = a' D = (b' + 1) D = 4 \times 5 = 20 \\ b = b' D = 3 \times 5 = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = a' D = (b' + 1) D = 5 \times 3 = 15 \\ b = b' D = 4 \times 3 = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = a' D = (b' + 1) D = 6 \times 2 = 12 \\ b = b' D = 5 \times 2 = 10 \end{cases}$$

18. Hallar los pares de números naturales (a, b) tales que si M es su m.c.m. y D su m.c.d. se cumpla

$$2\,M - 3\,D = 18$$

Solución.

$$\text{Sabemos que } M \times D = a \times b$$

$$\frac{2M - 3D}{D} = \frac{18}{D} \in N \quad \text{ya que}$$

$$\frac{2M}{D} \in N \text{ y } \frac{3D}{D} \in N$$

y la diferencia de dos números naturales es otro número natural.

Por tanto como $\frac{18}{D} \in N$ se ha de cumplir que D puede tomar los valores: 1, 2, 3, 6, 9 ó 18.

Estudiamos los distintos casos

— Si $D = 1 \Rightarrow 2M - 3D = 18 \Rightarrow 2M = 21$ y $M = \frac{21}{2} \notin N$

— Si $D = 2 \Rightarrow 2M - 3D = 18 \Rightarrow 2M - 6 = 18 \Rightarrow M = 12$

Como $a \times b = M \times D = 12 \times 2 = 24 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} 24 = 2 \times 12 \\ 24 = 4 \times 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 2 \text{ y } b = 12 \\ a = 4 \text{ y } b = 6 \end{array}\right.$$

Son dos soluciones.

— Si $D = 3 \Rightarrow 2M - 3D = 18 \Rightarrow 2M - 9 = 18 \Rightarrow M = \frac{27}{2} \notin N$

— Si $D = 6 \Rightarrow 2M - 3D = 18 \Rightarrow 2M - 18 = 18 \Rightarrow M = 18 \in N$

Como $a \times b = M \times D = 6 \times 18 = 108$

Por tanto $a = 6$ y $b = 18$

— Si $D = 9 \Rightarrow 2M - 3D = 18 \Rightarrow 2M - 27 = 18 \Rightarrow M = \frac{45}{2} \notin N$

— Si $D = 18 \Rightarrow 2M - 3D = 18 \Rightarrow 2M - 54 = 18 \Rightarrow M = 36$

como $a \times b = M \times D = 36 \times 18 \Rightarrow a = 18$ y $b = 36$

19. Calcular dos números a y b sabiendo que

$$\text{m. c. d.}\ (a, b) = 6$$
$$a \times b = 5.184$$

Solución

$$a = 6 \text{ y } b = 864$$
$$a = 54 \text{ y } b = 96$$

20. Hallar todos los pares de números naturales tales que el producto de su máximo común divisor por su mínimo común múltiplo sea 504 y el cociente entre el mínimo común múltiplo y su máximo común divisor sea 14.

Solución

$$(M \times D) \times \frac{M}{D} = 504 \times 14$$
$$M^2 = 7056 \Rightarrow M = 84$$

Como $\frac{M}{D} = 14$ y $M = 84 \Rightarrow D = 6$

Además: $a \times b = M \times D$ como $a = a' D$
$b = b' D$

$$a' D b' D = M D$$

$$a' b' = \frac{M}{D} = 14 = 2 \times 7$$

Por tanto

$$a' = 1 \quad y \quad b' = 14$$

$$a' = 2 \quad y \quad b' = 7$$

de donde

$$a = 6 \quad y \quad b = 84$$

$$a = 12 \quad y \quad b = 42$$

21. Hallar dos números sabiendo que su m. c. d. es 21 y que la diferencia de sus cuadrados es 9.261.

Solución

$$a'^2 - b^2 = 9.261$$

$$D = 21$$

Hacemos:

$$a = a' D \quad y \quad b = b' D$$

$$a'^2 D^2 - b'^2 D^2 = D^2 (a'^2 - b'^2) = 21^2 (a'^2 - b'^2) = 9.261$$

$$a'^2 - b'^2 = \frac{9.261}{21^2} = 21$$

$$a'^2 - b'^2 = (a' + b')(a' - b') = 7 \times 3$$

$$\left.\begin{array}{l} a' + b' = 7 \\ a' - b' = 3 \end{array}\right\} a' = 5 \quad y \quad b' = 2$$

Los números pedidos son

$$a = a' D = 5 \times 21 = 105$$

$$b = b' D = 2 \times 21 = 42$$

22. Hallar todas las parejas de números naturales tales que su producto sea 3.024 y su máximo común divisor 6.

Solución

$$a = 6 \quad y \quad b = 504$$
$$a = 24 \quad y \quad b = 126$$
$$a = 18 \quad y \quad b = 168$$
$$a = 42 \quad y \quad b = 72$$

23. Determinar dos números naturales sabiendo que su mínimo común múltiplo es 5.616 y su suma 2.574.

Solución

Llamamos: $a = a' D$ y $b = b' D$

$$a \times b = M \times D \Rightarrow M = \frac{a \times b}{D} = \frac{a' D b' D}{D} = a' b' D$$

Por tanto

$$M = a' b' D = 5.616$$
$$a + b = (a' + b') D = 2.574$$

Dividiendo m. a m.

$$\frac{a' b'}{a' + b'} = \frac{5.616}{2.574} = \frac{24}{11}$$

De donde: $a' = 8$ y $b' = 3$

$$D = \frac{a + b}{a' + b'} = \frac{2.574}{8 + 3} = 234$$

Los números pedidos son

$$a = a' D = 8 \times 234 = 1.872$$
$$b = b' D = 3 \times 234 = 702$$

24. Hallar todos los pares de números naturales sabiendo que su m.c.d. es 14 y su m.c.m. es 2.310.

Solución

$$a = 14 \text{ y } b = 2.310$$

$$a = 42 \text{ y } b = 770$$

$$a = 70 \text{ y } b = 462$$

$$a = 154 \text{ y } b = 210$$

25. Calcular los números de cuatro cifras divisibles por los diez primeros números naturales.

Solución

m.c.m. $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10) = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 2.520$

Los números pedidos son

$$2.520 \times 1 = 2.520$$
$$2.520 \times 2 = 5.040$$
$$2.520 \times 3 = 7.560$$

26. Hallar el menor número que dividido por 5, 7 y 13 da de resto 3.

Solución

$$N - 3 = \text{m.c.m. } (5, 7, 13) = 455$$
$$N = 455 + 3 = 458$$

27. ¿Cuántos números hay menores que 10.000 que sean divisibles al mismo tiempo por 225 y 315? Escribirlos todos.

Solución

$$\text{m.c.m. } (225, 315) = 1.575$$

Los números pedidos son:

$$1.575 \times 1 = 1.575$$
$$1.575 \times 2 = 3.150$$
$$1.575 \times 3 = 4.725$$
$$1.575 \times 4 = 6.300$$
$$1.575 \times 5 = 7.875$$
$$1.575 \times 6 = 9.450$$

7. Números enteros y racionales

CONCEPTOS TEORICOS

— Definición de número entero: En el conjunto $N \times N$ se considera la relación $(a_1, a_2)\ R\ (b_1, b_2) \Leftrightarrow a_1 + b_2 = a_2 + b_1$. Esta relación R es de equivalencia, dando lugar a una clasificación de los elementos de $N \times N$ en clases de equivalencia. Cada clase de equivalencia es un número entero.

— Suma de números enteros

$$a + b = (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

— Producto de números enteros

$$a \times b = (a_1, a_2) \times (b_1, b_2) = (a_1 b_1 + a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

— Diferencia de números enteros

$$a - b = (a_1, a_2) - (b_1, b_2) = (a_1 + b_2, a_2 + b_1)$$

— Estructuras

$(Z, +)$ es grupo abeliano.

$(Z, \times)$ es semigrupo unitario conmutativo.

$(Z, +, \times)$ es anillo unitario conmutativo.

— Definición de número racional: En el conjunto $Z \times Z^*$ se considera la relación $(a_1, a_2)\ R\ (b_1, b_2) \Leftrightarrow a_1 b_2 = a_2 b_1$. Esta relación R es de equivalencia, dando lugar a una clasificación de los elementos de

$Z \times Z^*$ en clases de equivalencia. Cada clase de equivalencia es un número racional.

— **Suma de números racionales**

$$a + b = (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = \frac{a_1}{a_2} + \frac{b_1}{b_2} = \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{a_2 b_2} =$$

$$= (a_1 b_2 + a_2 b_1, a_2 b_2)$$

— **Producto de números racionales**

$$a \times b = (a_1, a_2) \times (b_1, b_2) = \frac{a_1}{a_2} \times \frac{b_1}{b_2} = \frac{a_1 b_1}{a_2 b_2} = (a_1 b_1, a_2 b_2)$$

— **Resta de números racionales**

$$a - b = (a_1, a_2) - (b_1, b_2) = \frac{a_1}{a_2} - \frac{b_1}{b_2} = \frac{a_1 b_2 - b_1 a_2}{a_2 b_2} =$$

$$= (a_1 b_2 - b_1 a_2, a_2 b_2)$$

— **Cociente de números racionales**

$$a : b = (a_1, a_2) : (b_1, b_2) = \frac{a_1}{a_2} : \frac{b_1}{b_2} = \frac{a_1 b_2}{a_2 b_1} = (a_1 b_2, a_2 b_1)$$

— **Estructuras**

$(Q, +)$ es grupo abeliano.

$(Q, \times)$ es grupo abeliano.

$(Q, +, \times)$ es cuerpo abeliano.

PROBLEMAS

1. Demostrar que

$$a - (b - c) \neq (a - b) - c$$

siendo $a, b, c \in Z$ y $c \neq 0$

Solución

Llamamos $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ y $c = (c_1, c_2)$

Desarrollando el primer miembro

$$b - c = b + (-c) = (b_1, b_2) + (c_2, c_1) = (b_1 + c_2, b_2 + c_1)$$

$$-(b - c) = (b_2 + c_1, b_1 + c_2)$$

$$a - (b - c) = a + [-(b - c)] = (a_1, a_2) + (b_2 + c_1, b_1 + c_2) =$$

$$= (a_1 + b_2 + c_1, a_2 + b_1 + c_2)$$

— Desarrollando el segundo miembro

$$a - b = a + (-b) = (a_1, a_2) + (b_2, b_1) = (a_1 + b_2, a_2 + b_1)$$

$$(a - b) - c = (a - b) + (-c) = (a_1 + b_2, a_2 + b_1) + (c_2, c_1) =$$

$$= (a_1 + b_2 + c_2, a_2 + b_1 + c_1)$$

Por tanto siendo $c \neq 0$

$$a - (b - c) \neq (a - b) - c$$

2. Siendo $a, b, c \in Z$ demostrar

$$a(b - c) = ab - ac$$

Solución

Llamando $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ y $c = (c_1, c_2)$ se desarrolla cada uno de los miembros comprobando que los resultados coinciden.

3. Dados $a, b, c \in Z$ demostar que si

$$a + c > b + c \quad \text{entonces} \quad a > b$$

Solución

Llamamos $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ y $c = (c_1, c_2)$

$$a + c > b + c$$

$$(a_1, a_2) + (c_1, c_2) > (b_1, b_2) + (c_1, c_2)$$

$$(a_1 + c_1, a_2 + c_2) > (b_1 + c_1, b_2 + c_2)$$

$$(a_1 + c_1) + (b_2 + c_2) > (b_1 + c_1) + (a_2 + c_2)$$

$$a_1 + b_2 > b_1 + a_2$$

$$(a_1, a_2) > (b_1, b_2)$$

$$a > b$$

4. Dados a, b, c $\in$ Z demostrar que si

$$a + c < b + c \quad \text{entonces} \quad a < b$$

Solución

Llamando $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ y $c = (c_1, c_2)$ se van efectuando las operaciones de la hipótesis hasta llegar a la tesis como en el caso anterior.

5. Dados a, b, c $\in$ Z demostrar, siendo $c < 0$, que si

$$a\,c < b\,c \quad \text{entonces} \quad a > b$$

Solución

Llamando $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ y $c = (c_1, c_2)$

Como $c < 0 \Rightarrow c_1 < c_2$

Desarrollamos la desigualdad inicial

$$a\,c < b\,c$$

$$(a_1, a_2)\,(c_1, c_2) < (b_1, b_2)\,(c_1, c_2)$$

$$(a_1 c_1 + a_2 c_2, a_1 c_2 + a_2 c_1) < (b_1 c_1 + b_2 c_2, b_1 c_2 + b_2 c_1)$$

$$a_1 c_1 + a_2 c_2 + b_1 c_2 + b_2 c_1 < b_1 c_1 + b_2 c_2 + a_1 c_2 + a_2 c_1$$

Como $c_1 < c_2 \Rightarrow \exists\, n \in N \mid c_1 + n = c_2$ luego

$$a_1 c_1 + a_2 (c_1 + n) + b_1 (c_1 + n) + b_2 c_1 < b_1 c_1 +$$
$$+ b_2 (c_1 + n) + a_1 (c_1 + n) + a_2 c_1$$

$$a_1 c_1 + a_2 c_1 + a_2 n + b_1 c_1 + b_1 n + b_2 c_1 < b_1 c_1 +$$
$$+ b_2 c_1 + b_2 n + a_1 c_1 + a_1 n + a_2 c_1$$

$$a_2 n + b_1 n < b_2 n + a_1 n$$

$$(a_2 + b_1)\, n < (b_2 + a_1)\, n$$

$$a_2 + b_1 < b_2 + a_1$$

$$a_1 + b_2 > a_2 + b_1$$

$$(a_1, a_2) > (b_1, b_2)$$

$$a > b$$

6. Dados a, b, c $\in$ Z demostrar, siendo $c > 0$, que si

$$a\,c < b\,c \quad \text{entonces} \quad a < b$$

Solución

Llamando $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ y $c = (c_1, c_2)$ y siendo $c > 0$ resulta $c_1 = c_2 + n$, efectuando operaciones como en el caso anterior se llega a la tesis.

7. Siendo a, b $\in$ Z demostrar que si

$$a < b \quad \text{entonces} \quad -a > -b$$

Solución

Llamando $a = (a_1, a_2)$ y $b = (b_1, b_2)$

$$a < b$$

$$(a_1, a_2) < (b_1, b_2)$$

$$a_1 + b_2 < a_2 + b_1$$

$$(b_2, b_1) < (a_2, a_1)$$

$$(a_2, a_1) > (b_2, b_1)$$

$$-a > -b$$

8. Siendo a, b, c $\in$ Z demostrar que si

$$a < b + c \quad \text{entonces} \quad a - b < c$$

Solución

Llamando $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ y $c = (c_1, c_2)$

$$a < b + c$$

$$(a_1, a_2) < (b_1, b_2) + (c_1, c_2)$$

$$(a_1, a_2) < (b_1 + c_1, b_2 + c_2)$$

$$a_1 + b_2 + c_2 < b_1 + c_1 + a_2$$

$$(a_1 + b_2, b_1 + a_2) < (c_1, c_2)$$

$$(a_1, a_2) + (b_2, b_1) < (c_1, c_2)$$

$$a - b < c$$

9. Demostrar que siendo $b \in Z^+$ se verifica $\forall\, a \in Z$

$$a - b < a + b$$

Solución

Llamando $a = (a_1, a_2)$ y $b = (b_1, b_2)$ se demuestra la desigualdad como en los casos anteriores.

10. Demostrar que siendo $a, b, c \in Z^+$ no todos iguales se verifica

$$(b + c)(c + a)(a + b) > 8\, a\, b\, c$$

Solución

Se opera llegando a

$$a (b - c)^2 + b (c - a)^2 + c (a - b)^2 > 0$$

ya que los términos $a, b, c \in Z^+$ y los cuadrados son siempre positivos.

11. Indicar cuáles de las siguientes expresiones entre números enteros son siempre ciertas, siendo $a \neq b$.

1) $| a - b | = | a | - | b |$

2) $| a - b | > 0$

3) $| a - b | = | a | + | b |$

4) $| a - b | \geq 0$

5) $\sqrt{a + b} \times \sqrt{a - b} = \sqrt{a^2 - b^2}$

6) $\sqrt{a^2 - b^2} = a - b$

7) $\sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{a^2} - \sqrt{b^2}$

8) $\sqrt{a^2 - b^2} = a + b - \sqrt{2\, a\, b}$

(Nota. De la raíz se toma el signo + y $a > 0$)

Solución

2) $| a - b | > 0$ siempre es cierta porque el valor absoluto de la diferencia de dos enteros es mayor que cero.

5) $\sqrt{a + b} \times \sqrt{a - b} = \sqrt{(a + b)(a - b)} = \sqrt{a^2 - b^2}$

12. Indicar cuáles de las siguientes expresiones entre números enteros son siempre ciertas.

1) $| a + b | < | a | + | b |$

2) $|a + b | = | a | + | b |$

3) $| a + b | \geq | a | + | b |$

4) $| a + b | \leq | a | + | b |$

5) $\sqrt{(a + b)^2} = a + b + \sqrt{2 a b}$

6) $\sqrt{(a + b)^2} = a + b$

7) $\sqrt{(a + b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$

8) $\sqrt{(a + b)^2} = a + b + \sqrt{2}\, a b$

(Nota: de la raíz se toma el signo +)

Solución

Son correctas las expresiones

4) $| a + b | \leq | a | + | b |$

6) $\sqrt{(a + b)^2} = a + b$

13. Demostrar que en el conjunto Z de los números enteros no se cumple la propiedad antisimétrica.

Solución

$$\forall\, a, b \in Z \quad \text{si} \quad a < b \quad \text{y} \quad b < a \not\Rightarrow a = b$$

En efecto:

$$\text{Si } a < b \Rightarrow a + p = b$$

$$\text{Si } b < a \Rightarrow b + q = a$$

$$a + b + p + q = a + b \Rightarrow p + q = 0$$

De aquí $p = q = 0$ o $p = -q$

$$\text{Si } p = q = 0 \quad \text{entonces} \quad a = b$$

$$\text{Si } p = -q \quad \text{entonces} \quad a \neq b$$

14. Hallar para qué valores enteros de x el número

$$n = 4 + \frac{35}{x - 3}$$

es un número entero

Solución

Si n ha de ser entero, $x - 3$ ha de ser divisor de 35.

Los divisores enteros de 35 son:

$$\pm 1, \pm 5, \pm 7, \pm 35$$

Las posibles soluciones son:

$x - 3 = 1 \Rightarrow x = 4$	$x - 3 = 7 \Rightarrow x = 10$
$x - 3 = -1 \Rightarrow x = 2$	$x - 3 = -7 \Rightarrow x = -4$
$x - 3 = 5 \Rightarrow x = 8$	$x - 3 = 35 \Rightarrow x = 38$
$x - 3 = -5 \Rightarrow x = -2$	$x - 3 = -35 \Rightarrow x = -32$

15. Demostrar que si x e y son racionales positivos con $x < y$ entonces

$$\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$$

Solución

Sea $x = (x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_2}$, $y = (y_1, y_2) = \frac{y_1}{y_2}$

Como x e y son positivos $x_1 x_2 > 0$ e $y_1 y_2 > 0$

$$x < y$$

$$(x_1, x_2) < (y_1, y_2)$$

$$x_1 y_2 < x_2 y_1$$

como $x^{-1} = \frac{1}{x} = (x_2, x_1)$ e $y^{-1} = \frac{1}{y} = (y_2, y_1)$

$$(y_2, y_1) < (x_2, x_1)$$

$$\frac{1}{y} < \frac{1}{x}$$

16. Dados x, y, z $\in$ Q demostrar, siendo $z > 0$ que si

$$xz < yz \quad \text{entonces} \quad x < y$$

Solución

Llamando $x = (x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_2}$, $y = (y_1, y_2) = \frac{y_1}{y_2}$, $z = (z_1, z_2) = \frac{z_1}{z_2}$

$$xz < yz$$
$$(x_1, x_2)(z_1, z_2) < (y_1, y_2)(z_1, z_2)$$
$$(x_1 z_1, x_2 z_2) < (y_1 z_1, y_2 z_2)$$
$$x_1 z_1 y_2 z_2 < x_2 z_2 y_1 z_1$$
$$x_1 y_2 < y_1 x_2$$
$$(x_1, x_2) < (y_1, y_2)$$
$$x < y$$

17. Dados x, y z $\in$ Q demostrar, siendo $z < 0$, que si

$$xz < yz \quad \text{entonces} \quad x > y$$

Solución

Llamando $x = (x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_2}$; $y = (y_1, y_2) = \frac{y_1}{y_2}$;

$$z = (z_1, z_2) = \frac{z_1}{z_2} \text{ siendo } z_1 z_2 < 0$$

aplicando el producto de números racionales se llega a

$$x > y$$

18. Dados x, y, z $\in$ Q demostrar que si

$$x + z < y + z \quad \text{entonces} \quad x < y$$

Solución

Llamando $x = \frac{x_1}{x_2}$; $y = \frac{y_1}{y_2}$; $z = \frac{z_1}{z_2}$

$$x + z < y + z$$

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{z_1}{z_2} < \frac{y_1}{y_2} + \frac{z_1}{z_2}$$

$$\frac{x_1 z_2 + x_2 z_1}{x_2 z_2} < \frac{y_1 z_2 + y_2 z_1}{y_2 z_2}$$

$$x_1 z_2 y_2 z_2 + x_2 z_1 y_2 z_2 < y_1 z_2 x_2 z_2 + y_2 z_1 x_2 z_2$$

$$x_1 z_2 z_2 y_2 < x_2 y_1 z_2 z_2$$

$$x_1 y_2 < x_2 y_1$$

$$\frac{x_1}{x_2} < \frac{y_1}{y_2}$$

$$x < y$$

19. Demostrar que si $a < b$ se cumple siendo a y $b > 0$ y $a, b \in Q$

$$a < \frac{2ab}{a + b} < \sqrt{ab} < \frac{a + b}{2} < b$$

Solución

1) $a < \dfrac{2ab}{a + b}$ pues $\dfrac{2ab}{a + b} - a = \dfrac{a\,(b - a)}{a + b} > 0$

2) $\dfrac{2ab}{a + b} < \sqrt{ab}$ pues elevando al cuadrado

$$\left(\frac{2ab}{a + b}\right)^2 < ab \Rightarrow ab - \frac{4a^2 b^2}{(a + b)^2} = \frac{ab\,(a - b)^2}{(a + b)^2} > 0$$

3) $\sqrt{ab} < \dfrac{a + b}{2}$ pues elevando al cuadrado

$$ab < \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} - ab = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4} =$$

$$= \left(\frac{a - b}{2}\right)^2 > 0$$

4) $\frac{a + b}{2} < b$ pues $b - \frac{a + b}{2} = \frac{b - a}{2} > 0$

20. Probar que para todo número racional $a > 0$

$$a + \frac{1}{a} \geq 2$$

Solución

Lo demostramos por reducción al absurdo.

— Si $a < 0$ no cumple la relación establecida

$$a + \frac{1}{a} < 2 \Rightarrow \frac{a^2 + 1}{a} < 2 \Rightarrow a^2 + 1 < 2a$$

$$a^2 - 2a + 1 < 0 \Rightarrow (a - 1)^2 < 0$$

que es una contradicción pues todo número racional al cuadrado es mayor que cero, por tanto

$$a + \frac{1}{a} \geq 2$$

21. Hallar dos números racionales tales que su suma, su producto y su cociente sean iguales.

Solución

Llamamos

$$x = (x_1, x_2) \quad e \quad y = (y_1, y_2)$$

Se ha de cumplir

$$x + y = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1\ y_2 + x_2\ y_1, x_2\ y_2)$$

$$x \times y = (x_1, x_2) \times (y_1, y_2) = (x_1\ y_1, x_2\ y_2)$$

$$x : y = (x_1, x_2) : (y_1, y_2) = (x_1\ y_2, x_2\ y_1)$$

Por tanto

$$\left.\begin{array}{l} x + y = x \times y \\ x \times y = x : y \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} (x_1\, y_2 + x_2\, y_1,\ x_2\, y_2) = (x_1\, y_1,\ x_2\, y_2) \\ (x_1\, y_1,\ x_2\, y_2) = (x_1\, y_2,\ x_2\, y_1) \end{array}$$

de donde

$$(x_1\, y_1,\ x_2\, y_2) = (x_1\, y_2,\ x_2\, y_1) \Rightarrow y_1^2 = y_2^2 \Rightarrow y_1 = \pm y_2$$

— Si $y_1 = y_2 \Rightarrow (x_1\, y_2 + x_2\, y_1,\ x_2\, y_2) = (x_1\, y_1,\ x_2\, y_2)$

resulta

$$x_1\, y_2 + x_2\, y_2 = x_1\, y_2 \Rightarrow x_1 + x_2 = x_1 \Rightarrow x_2 = 0$$

cosa que no puede ocurrir pues $x = (x_1,\ x_2)$ y $x_2 \neq 0$

— Si $y_1 = -y_2 \Rightarrow x_1\, y_2 + x_2\, y_1 = x_1\, y_2 - x_2\, y_2 = -x_1\, y_2$

luego

$$(x_1 - x_2)\, y_2 = -x_1\, y_2 \Rightarrow x_1 - x_2 = -x_1 \Rightarrow x_2 = 2x_1$$

Por tanto los números racionales son:

$$x = (x_1,\ x_2) = (x_1,\ 2x_1)$$

$$y = (y_1,\ y_2) = (y_1,\ -y_1)$$

y sus representantes $x = (1,\ 2)$ e $y = (1,\ -1)$

22. Sea x un número racional. ¿Qué condición debe cumplir x para que existan y sean distintos?

$$x,\ -x,\ \frac{1}{x},\ -\frac{1}{x}$$

Solución

Ha de ser $x \notin \{-1,\ 0,\ 1\}$

Así para $x = 2$ resulta

$$2,\ -2,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}$$

23. Sean x e y dos números racionales que cumplen la condición

$x \notin \{-1,\ 0,\ 1\}$ e $y \notin \{-1,\ 0,\ 1\}$ y además

$$x < y \qquad \frac{1}{x} < \frac{1}{y}$$

Indicar qué números son positivos del conjunto

$$H = \{x, -x, \frac{1}{x}, -\frac{1}{x}, y, -y, \frac{1}{y}, -\frac{1}{y}\}$$

Solución

Es $x < 0 < y$ ya que si x e y tuvieran el mismo signo

$$x < y \Rightarrow \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$$

Por tanto los elementos positivos de H son

$$-x, -\frac{1}{x}, y, \frac{1}{y}$$

8. Areas de figuras planas

CONCEPTOS TEORICOS

— **Area triángulo** $= \dfrac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$

— **Area rectángulo** $= \text{base} \times \text{altura}$

— **Area del cuadrado** $= \text{lado} \times \text{lado}$

— **Area del rombo** $= \dfrac{\text{Diagonal} \times \text{diagonal}}{2}$

— **Area del trapecio** $= \dfrac{\text{Base} + \text{base}}{2} \times \text{altura}$

— **Area del círculo** $= \pi \times \text{radio}^2$

— **Area del sector** $= \dfrac{\pi \times \text{radio}^2}{360} \times \text{n}^{\circ}$

— **Area de la corona** $= \pi\,(R^2 - r^2)$

PROBLEMAS

1. El área de un triángulo es de 201,5 m^2 y se sabe que su altura mide 18 m. menos que la base. ¿Cuánto mide la base? ¿Cuánto la altura?

Solución

$$\left.\begin{aligned} \text{Area} &= \frac{b \times a}{2} = 201{,}5 \\ a &= b - 18 \end{aligned}\right\}$$

$$b \times a = 403 \Rightarrow b\,(b - 18) = 403 \Rightarrow b^2 - 18b - 403 = 0$$

$$b = \frac{18 \pm \sqrt{324 + 1.612}}{2} = \frac{18 \pm 44}{2} = \begin{cases} 31 \\ \text{negativo} \end{cases}$$

Si $b = 31 \Rightarrow a = 31 - 18 = 13$

Por tanto base = 31 m. y altura = 13 m.

2. ¿Cuántas baldosas de forma cuadrada son necesarias para embaldosar una habitación de 16 m. de largo por 12 m. de ancho, sabiendo que las baldosas son de $0{,}40 \times 0{,}40$ m²?

Solución

Area rectángulo = $16 \times 12 = 192$ m²

Area baldosa = $0{,}40 \times 0{,}40 = 0{,}16$ m²

N.º baldosas = $\dfrac{192}{0{,}16} = 1.200$

3. Calcular el área de un rectángulo en que uno de los lados es $a/2$ y el otro es la mayor de las raíces de la ecuación.

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a - x} - \frac{1}{a - 2x} = 0$$

Solución

$$(a - x)(a - 2x) - a(a - 2x) - a(a - x) = 0$$

$$2x^2 - a^2 = 0 \begin{cases} x = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \\ \\ x = -\dfrac{a\sqrt{2}}{2} \text{ (nula)} \end{cases}$$

El rectángulo tendrá de lados $\dfrac{a}{2}$ y $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ y su área

$$A = \frac{a}{2} \times \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}\, u^2$$

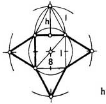
4. El área de un trapecio es 120 m², la altura 8 m. y una de las bases mide 10 m. ¿Cuánto mide la otra?

Solución

$$A = \frac{B + b}{2} \times a \Rightarrow 120 = \frac{B + 10}{2} \times 8 \Rightarrow B = 20 \text{ m.}$$

5. En una circunferencia de radio igual a 4 m. se inscribe un cuadrado y sobre los lados de éste y hacia el exterior se construyen triángulos equiláteros. Hallar el área de la estrella así formada.

Solución



$$l^2 + l^2 = 8^2$$

$$l = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \text{ m.}$$

La altura del triángulo equilátero de lado l es:

$$h = \sqrt{l^2 - \frac{l^2}{4}} = \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{6} \text{ m.}$$

$$\text{Area del triángulo} = \frac{l \times h}{2} = \frac{4\sqrt{2} \times 2\sqrt{6}}{2} = 8\sqrt{3}\, \text{m}^2$$

Area del cuadrado $= l^2 = 32$

Area de la estrella = 4 Areas triángulo + Area cuadrado = $= 4 \times 8\sqrt{3} + 32 = 32(\sqrt{3} + 1)\, \text{m}^2$

6. Determinar el lado de un triángulo equilátero cuyo perímetro es igual al de un cuadrado de lado 12 cm. ¿Serán iguales sus áreas?

Solución

Perímetro cuadrado $= 12 \times 4 = 48$

Perímetro triángulo $= 48 = 3\,l \Rightarrow l = 16$

Área cuadrado $= 12^2$

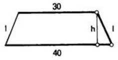
Área triángulo $= \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{16^2 \sqrt{3}}{4}$

Las áreas no son iguales pues,

$$\left.\begin{array}{l} \text{A. triángulo} = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} \\ \text{A. cuadrado} = l'^2 \end{array}\right\} \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} \neq l'^2$$

7 El perímetro de un trapecio isósceles es de 110 m.; las bases 40 m. y 30 m. respectivamente. Calcular los lados no paralelos y el área.

Solución



Perímetro $= B + b + 2l = 40 + 30 + 2l = 110 \Rightarrow l = 20$ m.

$$\text{Area} = \frac{B + b}{2} \times h$$

$$h = \sqrt{20^2 - 5^2} = 5\sqrt{15}$$

$$\text{Area} = \frac{40 + 30}{2} \times 5\sqrt{15} = 175\sqrt{15}\ \text{m}^2$$

8. Si los lados no paralelos de un trapecio isósceles se prolongan, quedaría formado un triángulo equilátero de 6 cm. de lado. Sabiendo que el trapecio tiene la mitad de la altura del triángulo, calcular el área del trapecio.

Solución

El triángulo equilátero de lado 6 cm. tiene por altura

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

El trapecio tendrá una altura mitad: $h' = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

Area del trapecio $= \dfrac{B + b}{2} \times h' = \dfrac{6 + 3}{2} \times \dfrac{3\sqrt{3}}{2} = \dfrac{27\sqrt{3}}{4}$ cm^2

9. Determinar el área del cuadrado inscrito en una circunferencia de longitud 18,84 m.

Solución

$$L = 2\pi r = 18{,}84$$

$$r = \frac{18{,}84}{2\pi} = 3$$

Si $r = 3 \Rightarrow d = 6;\ \ l^2 + l^2 = d^2 \Rightarrow l = 3\sqrt{2}$

Area del cuadrado $= l^2 = 18$ m^2

10. Un cuadrilátero rectángulo tiene 10 cm. de perímetro y 4 cm^2 de área. ¿Cuáles son sus dimensiones?

Solución

$$\begin{cases} \text{Area} = b \times a = 4 \\ \text{Perímetro} = 2b + 2a = 10 \end{cases}$$

$$b = 5 - a \Rightarrow (5 - a)\,a = 4 \Rightarrow a^2 - 5a + 4 = 0$$

$$a = 4 \quad y \quad a = 1$$

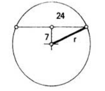
Si $a = 4 \Rightarrow b = 1$

Si $a = 1 \Rightarrow b = 4$

Los lados del rectángulo son 4 cm. y 1 cm.

11. En una circunferencia una cuerda de 48 cm. dista 7 cm. del centro. Calcular el área del círculo.

Solución



$$r = \sqrt{24^2 + 7^2} = 25$$

$$A = \pi r^2 = 25^2\,\pi = 625\pi \text{ cm}^2$$

12. La longitud de una circunferencia es 43,96 cm. ¿Cuál es el área del círculo?

Solución

$$L = 2\pi r = 43{,}96 \text{ cm.} \Rightarrow r = \frac{43{,}96}{2\pi} = 7 \text{ cm.}$$

$$A = \pi r^2 = 7^2\,\pi = 49\pi \text{ cm}^2$$

13. El área de un triángulo rectángulo e isósceles es 32 cm². Hallar la longitud de la circunferencia circunscrita.

Solución

La hipotenusa del triángulo rectángulo es el diámetro de la circunferencia circunscrita, luego

$$A = \frac{l \times l}{2} = 32 \Rightarrow l^2 = 64 \Rightarrow l = 8 \text{ cm.}$$

La hipotenusa del triángulo rectángulo que es el diámetro vale

$$d = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{8^2 + 8^2} = 8\sqrt{2}$$

La longitud de la circunferencia es

$$L = 2\pi r = \pi d = 8\sqrt{2}\pi \text{ cm.}$$

14. Calcular el perímetro de un exágono regular circunscrito a una circunferencia de 4 m. de diámetro.

Solución

$$\frac{l^2}{4} + 4 = l^2 \Rightarrow l = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

El perímetro $P = 6 \times l = 6 \times \frac{4\sqrt{3}}{3} = 8\sqrt{3}$ m.

15. Una mesa está formada por un rectángulo de 1,70 m. de largo por 0,80 m. de ancho y de dos semicírculos que le prolongan en el sentido de la longitud, teniendo por diámetro la anchura de la mesa. ¿Cuál es el área de la mesa? ¿Cuál es su perímetro?

Solución

$$\text{Area} = \text{Area rectángulo} + \text{Area círculo} =$$

$$= (0{,}80 \times 1{,}70) + \pi \times 0{,}40^2 = 1{,}36 + 0{,}16\pi \text{ m}^2$$

$$\text{Perímetro} = (2 \times 1{,}70) + 2\pi \times 0{,}40 = 3{,}4 + 0{,}8\pi \text{ m}$$

16. Los catetos de un triángulo inscrito en una circunferencia miden 22,2 cm. y 29,6 cm. respectivamente. Calcular la longitud de la circunferencia y el área del círculo.

Solución

$$\text{diámetro} = \sqrt{22{,}2^2 + 29{,}6^2} = 37 \text{ cm.}$$

$$\text{radio} = \frac{37}{2} = 18{,}5 \text{ cm.}$$

$$L = 2\pi r = 37\pi \text{ cm.}$$

$$A = \pi r^2 = 18{,}5^2\,\pi = 342{,}25\pi \text{ cm}^2$$

17. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 30 cm. y la proyección de un cateto sobre ella 10,8 cm. Hallar el área del triángulo.

Solución

$$\frac{b}{30} = \frac{10{,}8}{b} \Rightarrow b^2 = 30 \times 10{,}8 \Rightarrow b = 18 \text{ cm.}$$

$$c = \sqrt{30^2 - 18^2} = \sqrt{900 - 324} = 24 \text{ cm.}$$

$$\text{Area} = \frac{\text{cateto} \times \text{cateto}}{2} = \frac{18 \times 24}{2} = 216 \text{ cm}^2$$

18. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 405,6 m. y la proyección de un cateto sobre ella 60 m. Calcular: 1) Los catetos, 2) La altura relativa a la hipotenusa y 3) El área del triángulo.

Solución

$$\frac{c}{60} = \frac{405{,}6}{c} \Rightarrow c^2 = 24.336 \Rightarrow c = 156 \text{ m.}$$

$$h = \sqrt{156^2 - 60^2} = 144 \text{ m.}$$

$$\text{Area} = \frac{a \times h}{2} = \frac{405{,}6 \times 144}{2} = 29.203{,}2 \text{ m}^2$$

$$\text{Area} = \frac{b \times c}{2} = \frac{b \times 156}{2} = 29.203{,}2 \Rightarrow b = 374{,}4 \text{ m.}$$

19. El área de un cuadrado es 2.304 cm^2. Calcular el área del exágono regular que tiene su mismo perímetro.

Solución

Area del cuadrado $= l^2 = 2.304 \Rightarrow l = 48$ cm.

El perímetro del cuadrado es $P = 4 \times l = 192$ cm.

El perímetro del exágono es

$$P = 6 \times l' = 192 \Rightarrow l' = \frac{192}{6} = 32 \text{ cm.}$$

$$\text{apotema} = \sqrt{l'^2 - \frac{l'^2}{4}} = \frac{l' \sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3} \text{ cm.}$$

$$\text{Area del exágono} = \frac{\text{perímetro} \times \text{apotema}}{2} = \frac{192 \times 16\sqrt{3}}{2} =$$

$$= 1.536\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

20. Calcular el área de un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de radio 6 cm.

Solución

El centro de la circunferencia es el baricentro.

$$\frac{2h}{3} = r = 6 \Rightarrow h = 9 \text{ cm.}$$

$$l^2 = h^2 + \frac{l^2}{4} \Rightarrow h^2 = \frac{3\,l^2}{4} \Rightarrow l = \frac{2\,h}{\sqrt{3}} = \frac{2 \times 9}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}\ \text{cm.}$$

$$\text{Area} = \frac{l \times h}{2} = \frac{6\sqrt{3} \times 9}{2} = 27\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

21. El área de un sector circular de 90° es 4π cm. Calcular el radio del círculo a que pertenece y la longitud de la circunferencia.

Solución

$$A = \frac{\pi\, r^2}{360} \times n = \frac{\pi \times r^2}{360} \times 90 = 4\pi \Rightarrow r = 4\ \text{cm.}$$

$$L = 2\pi r = 2\pi \times 4 = 8\pi\ \text{cm.}$$

22. Sobre un círculo de 4 cm. de radio se traza un ángulo central de 60°. Hallar el área del segmento circular comprendido entre la cuerda que une los extremos de los dos radios y su arco correspondiente.

Solución

$$\text{Area sector} = \frac{\pi\, r^2}{360} \times 60 = \frac{\pi \times 4^2}{360} \times 60 = \frac{8}{3}\,\pi\ \text{cm}^2$$

$$\text{Area triángulo} = \frac{b \times h}{2} = \frac{b \times \frac{b\sqrt{3}}{2}}{2} = 4\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

Area segmento = Area sector − Area triángulo =

$$= \frac{8}{3}\,\pi - 4\sqrt{3} = 4\left(\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}\right)\ \text{cm}^2$$

23. Dado un triángulo equilátero de 6 m. de lado, hallar el área de uno de los sectores determinados por la circunferencia circunscrita y por los radios que pasan por los vértices.

Solución

$$\text{Radio} = \frac{2}{3}\,\text{altura} = \frac{2}{3} \times \sqrt{l^2 - \frac{l^2}{4}} = \frac{2}{3} \times \sqrt{6^2 - 3^2} = \frac{2}{3}\sqrt{27}\ \text{cm}^2$$

$$\text{Area} = \frac{\pi r^2}{360} \times 120 = \frac{\pi \times \frac{4}{9} \times 27}{3} = 4\pi\ \text{cm}^2$$

24. Hallar el área del sector circular cuya cuerda es el lado del triángulo equilátero inscrito siendo 2 cm. el radio de la circunferencia.

Solución

$$A = \frac{\pi r^2}{360} \times n = \frac{\pi \times 2^2}{360} \times 120 = \frac{4\pi}{3} \text{ cm}^2$$

25. Hallar el área del sector circular cuya cuerda es el lado del cuadrado inscrito, siendo 4 cm. el radio de la circunferencia.

Solución

$$A = \frac{\pi r^2}{360} \times 90^{\circ} = 4\pi \text{ cm}^2$$

26. Calcular el área de un sector circular de 14 m. de radio equivalente a un cuadrado cuyo lado es igual a la longitud del arco de aquél.

Solución

$$A_s = \frac{\pi r^2}{360} \times n = \frac{\pi \times 14^2}{360} \times n$$

$$A_c = l^2 = \left(\frac{2\pi r}{360} \times n\right)^2 = \left(\frac{2\pi \times 14}{360} \times n\right)^2$$

Como

$$A_s = A_c \quad \text{resulta}$$

$$\frac{\pi \times 14^2}{360} \times n = \frac{4\pi^2 \times 14^2}{360^2} \times n^2 \Rightarrow n = \frac{360}{4\pi} \Rightarrow$$

$$A_s = \frac{\pi \times 14^2}{360} \times \frac{360}{4\pi} = 49 \text{ m}^2$$

27. Hallar el área del sector circular cuya cuerda mayor es el lado del exágono inscrito, siendo 6 cm. el radio de la circunferencia.

Solución

Como el ángulo central correspondiente es 60º

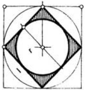
$$A = \frac{\pi r^2}{360} \times n = \frac{\pi \times 6^2}{360} \times 60 = 6\pi \text{ cm}^2$$

Más fácilmente el área del sector circular es la sexta parte del área del círculo.

$$A = \frac{\pi r^2}{6} = 6\pi \text{ cm}^2$$

28. En un cuadrado de lado 2 cm. se inscribe un círculo y en este círculo un cuadrado y en éste otro círculo. Hallar el área comprendida entre el último cuadrado y el último círculo.

Solución



$$2l^2 = 2^2 \Rightarrow l = \sqrt{2}$$

$$r = \frac{l}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

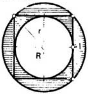
$$\text{Area cuadrado} = l \times l = 2 \text{ cm}^2$$

$$\text{Area círculo} = \pi r^2 = \frac{\pi}{2} \text{ cm}^2$$

$$\text{Area comprendida} = 2 - \frac{\pi}{2} = \frac{4 - \pi}{2} \text{ cm}^2$$

29. Calcular el área de la de la corona circular determinada por las circunferencias inscrita y circunscrita a un cuadrado de 8 m. de diagonal.

Solución



$$R = 4 \text{ m.}$$

$$2l^2 = d^2 = 8^2 \Rightarrow l^2 = \frac{64}{2} = 32$$

$$l = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \Rightarrow \frac{l}{2} = 2\sqrt{2}$$

Radio mayor = 4

Radio menor = $2\sqrt{2}$

Area = $\pi (R^2 - r^2) = \pi (16 - 8) = 8\pi \text{ m}^2$

30. A un exágono regular de 4 cm. de lado se le inscribe una circunferencia y se le circunscribe otra. Hallar el área de la corona circular así formada.

Solución

$$R = 4 = \text{lado}$$

$$r = \text{apotema} = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$A = \pi (R^2 - r^2) = \pi (4^2 - 12) = 4\pi \text{ cm}^2$$

9. Geometría del plano

CONCEPTOS TEORICOS

— **Ecuaciones de la recta:**

$$y = mx + n$$

$$Ax + By + C = 0$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

— **Recta que pasa por dos puntos:**

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1} \qquad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

— **Distancia entre dos puntos:**

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

— **Angulo de dos rectas:**

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m - m'}{1 + mm'}$$

— **Distancia de un punto a una recta**

$$d = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

— **Area de un triángulo:**

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

— **Ecuación de la circunferencia:**

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ o $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

— **Tangente a una circunferencia:**

1) $(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0$ si $P \in$ circ.

2) $\left.\begin{array}{l} (x - a)(x_1 - x) + (y - b)(y_1 - y) = 0 \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \end{array}\right\}$ si $P \notin$ circ.

— **Ecuación de la elipse:**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

— **Tangente a una elipse:**

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

— **Ecuación de la hipérbola:**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

— **Tangente a una hipérbola:**

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

— **Ecuación de la parábola:**

$$y^2 = 2px$$

— **Tangente a una parábola:**

$$yy_0 = p(x + x_0)$$

PROBLEMAS

1. Determinar en qué cuadrante puede estar situado el punto M (x, y) si:

1) $xy > 0$	*2)* $xy < 0$	*3)* $x - y = 0$
4) $x + y = 0$	*5)* $x + y > 0$	*6)* $x + y < 0$
7) $x - y > 0$	*8)* $x - y < 0$	*9)* $\frac{x}{y} > 0$

Solución

1) $xy > 0 \Rightarrow$ El punto M (x, y) se puede encontrar en el 1.º y 3.^{er} cuadrante.

2) $xy < 0 \Rightarrow$ El punto M (x, y) se puede encontrar en el 2.º y 4.º cuadrante.

3) $x - y = 0 \Rightarrow x = y$, el punto M (x, y) se puede encontrar en la bisectriz del 1.º y 3.^{er} cuadrante.

4) $x + y = 0 \Rightarrow y = -x$, el punto M (x, y) se puede encontrar en la bisectriz del 2.º y 4.º cuadrante.

5) $x + y > 0 \Rightarrow$ El punto M se puede encontrar en 1.º, 2.º y 4.º cuadrante.

6) $x + y < 0 \Rightarrow$ El punto M se puede encontrar en 2.º, 3.^{er} y 4.º cuadrante.

7) $x - y > 0 \Rightarrow$ El punto M se puede encontrar en 1.º, 3.^{er} y 4.º cuadrante.

8) $x - y < 0 \Rightarrow$ El punto M se puede encontrar en 1.º, 2.º y 3.^{er} cuadrante.

9) $\frac{x}{y} > 0 \Rightarrow$ El punto M se puede encontrar en 1.º y 3.^{er} cuadrante.

2. Dados los puntos A (0, −1) y B (1, 2) hallar las coordenadas de los puntos P de la recta $x + y - 2 = 0$ tales que la recta PA y PB sean perpendiculares.

Solución

$$P(x, y), A(0, -1), B(1, 2)$$

Como $P \in$ recta $\Rightarrow y = 2 - x$ luego $P(x, 2 - x)$

Las pendientes de PA y de PB son opuestas e inversas.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow \frac{2 - x - (-1)}{x - 0} = -\frac{x - 1}{2 - x - 2}$$

de donde

$$\frac{3 - x}{x} = \frac{x - 1}{x} \Rightarrow x = 2 \text{ e } y = 0 \Rightarrow P(2, 0)$$

3. Un punto P equidista de los A (6, 10) y B (−4, 8) y dista del eje OY doble que del eje OX. Hallar sus coordenadas.

Solución

Como el punto P dista doble del eje OY que del eje OX, tendrá de coordenadas $P(x, 2x)$.

Por equidistar de A y de B $\Rightarrow PA = PB$

$$\sqrt{(x - 6)^2 + (2x - 10)^2} = \sqrt{(x + 4)^2 + (2x - 8)^2}$$

$$(x - 6)^2 + (2x - 10)^2 = (x + 4)^2 + (2x - 8)^2$$

$$x = 2$$

Las coordenadas del punto P son P (2, 4).

4. Encontrar la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas.

$$x + 4y = 18$$
$$x + 2y = 2$$

y que dista 2 unidades del origen de coordenadas.

Solución

$$\left.\begin{aligned} x + 4y &= 18 \\ x + 2y &= 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow P(-14, 8)$$

La ecuación de la recta que pasa por P es:

$$y - 8 = m(x + 14)$$

$$mx - y + (8 + 14m) = 0$$

La distancia del punto O (0, 0) a la recta es 2, luego

$$d = \frac{8 + 14m}{\sqrt{m^2 + 1}} = 2$$

$$8 + 14\,m = 2\sqrt{m^2 + 1}$$

$$48\,m^2 + 56\,m + 15 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m_1 = -\dfrac{5}{12} \\ m_2 = -\dfrac{3}{4} \end{cases}$$

Las rectas son:

$$y - 8 = -\frac{5}{12}(x + 14)$$

$$y - 8 = -\frac{3}{4}(x + 14)$$

5. Hallar el área del triángulo determinado por el punto (0, 8) y los puntos en que la recta:

$$x \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + y \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 3$$

corta a los ejes coordenados.

Solución

La ecuación de la recta se puede poner así:

$$x \cos(-60^o) + y \operatorname{sen}(-60^o) = 3$$

$$x\frac{1}{2} - y\frac{\sqrt{3}}{2} = 3$$

Los puntos de corte son A (6, 0) y B $(0, -2\sqrt{3})$

El área del triángulo viene dada por

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 8 & 1 \\ 0 & -2\sqrt{3} & 1 \\ 6 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \times 6\,(8 + 2\sqrt{3}) = 3\,(8 + 2\sqrt{3})\ u^2$$

6. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $x - 2y - 4 = 0$, $x - y = 4$ formando un ángulo de $45°$ con la recta $9x - 5y - 12 = 0$.

Solución

$$\left.\begin{aligned} x - 2y - 4 &= 0 \\ x - y - 4 &= 0 \end{aligned}\right\} P\,(4,\,0)$$

La pendiente de la recta $9x - 5y - 12 = 0$ es $m = \dfrac{9}{5}$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{m - m'}{1 + mm'}\,;\quad 1 = \frac{\frac{9}{5} - m'}{1 + \frac{9}{5}m'} \Rightarrow m' = \frac{2}{7}$$

La recta que pasa por $P\,(4,\,0)$ y de pendiente $m' = \dfrac{2}{7}$

$$y - 0 = \frac{2}{7}\,(x - 4) \Rightarrow 2x - 7y - 8 = 0$$

7. Por el punto $A\,(2,\,6)$ se trazan dos rectas perpendiculares a las bisectrices del 1.º y 2.º cuadrante. Hallar: 1.º) Las ecuaciones de dichas rectas; 2.º) Las coordenadas de los otros vértices del triángulo formado por la recta $3x - 13y = 8$ con dichas rectas.

Solución

1.^er^ cuadrante: $y = x$

2.º cuadrante: $y = -x$

— Recta perpendicular a $y = x$ por $A\,(2,\,6)$

$$y - 6 = -1\,(x - 2) \Rightarrow y + x - 8 = 0$$

— Recta perpendicular a $y = -x$ por A (2, 6)

$$y - 6 = 1(x - 2) \Rightarrow y - x - 4 = 0$$

Hallamos los vértices del triángulo

$$\left.\begin{array}{l} y + x - 8 = 0 \\ y - x - 4 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A\,(2, 6) \qquad \left.\begin{array}{l} y - x - 4 = 0 \\ 3x - 13y - 8 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow C\,(-6, -2)$$

$$\left.\begin{array}{l} y + x - 8 = 0 \\ 3x - 13y - 8 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow B\,(7, 1)$$

8. Dadas las coordenadas de los vértices de un triángulo A (0, 8), B (6, 0) y C (−2, −2). Hallar las ecuaciones de sus medianas.

Solución

Los puntos medios de los lados son

— De $AB \Rightarrow M_1\,(3, 4)$

— De $BC \Rightarrow M_2\,(2, -1)$

— De $CA \Rightarrow M_3\,(-1, 3)$

Ecuaciones de las medianas:

— Que pasa por $CM_1 \Rightarrow 6x - 5y + 2 = 0$

— Que pasa por $AM_2 \Rightarrow 9x + 2y - 16 = 0$

— Que pasa por $BM_3 \Rightarrow 3x + 7y - 18 = 0$

9. Una recta de ecuación $x + 2y - 9 = 0$ es mediatriz de un segmento AB cuyo extremo A tiene por coordenadas (2, 1). Hallar las coordenadas del otro extremo.

Solución

La ecuación de la recta que pasa por A (2, 1) y tiene de pendiente la opuesta e inversa a la mediatriz de AB es

$$y - 1 = 2(x - 2) \Rightarrow 2x - y - 3 = 0$$

El punto M de intersección de las dos rectas es:

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y - 9 = 0 \\ \\ 2x - y - 3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow M(3, 3)$$

El punto B (x, y) cumple

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x + 2}{2} = 3 \\ \dfrac{y + 1}{2} = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow B(4, 5)$$

10. Dados los puntos A (3, 4) y B (7, 8). Hallar en la recta $3x - 5y + 25 = 0$ las coordenadas del punto equidistante de ambos.

Solución

El punto P (x, y) cumple:

a) Es equidistante de A y de B $\Rightarrow$ PA = PB

b) Pertenece a la recta $3x - 5y + 25 = 0$

por tanto

$$\sqrt{(x - 3)^2 + (y - 4)^2} = \sqrt{(7 - x)^2 + (8 - y)^2}$$
$$3x - 5y + 25 = 0$$

operando

$$\left.\begin{array}{r} x + y - 11 = 0 \\ \\ 3x - 5y + 25 = 0 \end{array}\right\} P\left(\frac{15}{4}, \frac{29}{4}\right)$$

11. De un triángulo se conocen los vértices A (1, −1), B (3, 2) y el baricentro es G (0, 1). Determinar las coordenadas del vértice C y calcular el área del triángulo.

Solución

Calculamos el punto medio de GA y de GB

— De GA $\qquad M_1\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

— De GB $\qquad M_2\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

$M'_1(x, y)$ es simétrico de M_1 respecto a G

$$\frac{x + \frac{1}{2}}{2} = 0; \quad \frac{y + 0}{2} = 1 \Rightarrow M'_1\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$$

$M'_2(x, y)$ es simétrico de M_2 respecto a G

$$\frac{x + \frac{3}{2}}{2} = 0; \quad \frac{y + \frac{3}{2}}{2} = 1 \Rightarrow M'_2\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

— Recta que pasa por B y M'_1

$$y - 2 = \frac{2 - 2}{-\frac{1}{2} - 3}(x - 3) \Rightarrow y = 2$$

— Recta que pasa por A y M'_2

$$y + 1 = \frac{\frac{1}{2} + 1}{-\frac{3}{2} - 1}(x - 1) \Rightarrow 3x + 5y + 2 = 0$$

La intersección de estas dos rectas da el vértice C

$$\left.\begin{array}{r} y = 2 \\ 3x + 5y + 2 = 0 \end{array}\right\} \quad C(-4, 2)$$

$$\text{Area del triángulo } \widehat{ABC} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 10{,}5 \text{ u}^2$$

12. En un triángulo ABC el baricentro es G (1, 2). El punto medio de AB es M (2, 4) y el punto medio de BC es N (3, −2). Hallar los tres vértices del triángulo.

Solución

Llamamos A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) y C (x_3, y_3)

— S es el simétrico de M respecto de G

$$\frac{2 + x'}{2} = 1 \quad \frac{4 + y'}{2} = 2 \Rightarrow S(0, 0)$$

— Como S en el centro del segmento CG se cumple

$$\frac{x_3 + 1}{2} = 0 \quad \frac{y_3 + 2}{2} = 0 \Rightarrow C(-1, -2)$$

Como N (3, −2) es el punto medio del segmento BC

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x_2 + x_3}{2} = 3 \\ \dfrac{y_2 + y_3}{2} = -2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Como } x_3 = -1 \text{ e } y_3 = -2 \\ \text{resulta } x_2 = 7 \text{ e } y_2 = -2 \\ \qquad B(7, -2) \end{array}$$

Como M (2, 4) es el punto medio del segmento AB

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x_1 + 7}{2} = 2 \\ \dfrac{y_1 - 2}{2} = 4 \end{array}\right\} x_1 = -3 \text{ e } y_1 = 10 \Rightarrow A(-3, 10)$$

13. Dos vértices consecutivos de un cuadrado son A (0, 2) y B (3, 0). Hallar.

1) Las coordenadas de los otros dos vértices, sabiendo que están en el primer cuadrante.

2) El lado del cuadrado.

3) Su área.

Solución

1) Las coordenadas de los otros dos puntos las obtenemos así:

— Por A trazamos la recta perpendicular a la que pasa por AB, de ecuación.

$$y - 2 = \frac{3}{2}(x - 0) \Rightarrow 3x - 2y + 4 = 0$$

— Por B trazamos la recta perpendicular a la que pasa por AB

$$y - 0 = \frac{3}{2}(x - 3) \Rightarrow 3x - 2y - 9 = 0$$

— Llamando P (x, y) al punto, se cumple que la distancia de P a la recta que pasa por A y B es la misma que d (AB)

$$\frac{2x + 3y - 6}{\sqrt{4+9}} = \sqrt{13}$$

Imponiendo la condición de que pertenezca a cada una de las dos rectas halladas.

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y - 6 &= 13 \\ 3x - 2y + 4 &= 0 \end{aligned}\right\} D\,(2, 5)$$

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y - 6 &= 13 \\ 3x - 2y - 9 &= 0 \end{aligned}\right\} C\,(5, 3)$$

2) El lado es $l = d\,(AB) = \sqrt{13}$

3) El área del cuadrado

$$A = l^2 = (\sqrt{13})^2 = 13 \ u^2$$

14. Determinar el área del paralelogramo OABC y las ecuaciones de sus lados AB y BC sabiendo que OA es la recta $x - 2y = 0$, OC la $3x + y = 0$ y que las coordenadas de B son (3, 5).

Solución

1) Como se trata de un paralelogramo

— Ecuación de la recta, que pasa por B y es paralela a OA.

$$y - 5 = \frac{1}{2}(x - 3) \Rightarrow x - 2y + 7 = 0$$

— Ecuación de la recta, que pasa por B y es paralela a OC.

$$y - 5 = -3(x - 3) \Rightarrow 3x + y - 14 = 0$$

— El punto A se obtiene como intersección de

$$\left.\begin{array}{l} 3x + y - 14 = 0 \\ x - 2y = 0 \end{array}\right\} A\ (4,\ 2)$$

— El punto C se obtiene como intersección de

$$\left.\begin{array}{l} x - 2y + 7 = 0 \\ 3x + y = 0 \end{array}\right\} C\ (-1,\ 3)$$

2) Para determinar el área del paralelogramo calculamos la distancia de un vértice al lado opuesto que será la altura.

$$h = \frac{3 \times 3 + 1 \times 5}{\sqrt{3^2 + 1}} = \frac{14}{\sqrt{10}}$$

$$\text{base} = \sqrt{(-1 - 0)^2 + (3 - 0)^2} = \sqrt{10}$$

$$\text{Area} = \sqrt{10} \times \frac{14}{\sqrt{10}} = 14u^2$$

15. Los puntos B (−1, 3) y C (3, −3) son vértices de un triángulo isósceles que tiene el tercer vértice A en la recta $x + 2y = 15$, siendo AB y AC los lados iguales. Calcular las coordenadas de A y las tres alturas del triángulo.

Solución

El tercer vértice A (x, y) está a igual distancia de B que de C

$$d\,(AB) = d\,(AC)$$

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y+3)^2}$$

$$8x - 12y - 8 = 0$$

que junto con $x + 2y = 15$ dan lugar al punto A (7, 4)

Para las alturas tenemos:

— Altura desde el vértice A

$$y - 4 = m'\,(x - 7) \Rightarrow m' = \frac{-1}{m} = \frac{-1}{-\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$y - 4 = \frac{2}{3}(x - 7) \Rightarrow 2x - 3y - 2 = 0$$

— Altura desde el vértice B

$$y - 3 = m'\,(x + 1) \Rightarrow m' = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{7/4} = \frac{-4}{7}$$

$$y - 3 = -\frac{4}{7}(x + 1) \Rightarrow 4x + 7y - 17 = 0$$

— Altura desde el vértice C

$$y + 3 = m'\,(x - 3) \Rightarrow m' = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{1/8} = -8$$

$$y + 3 = -8\,(x - 3) \Rightarrow 8x + y - 21 = 0$$

16. Un rectángulo tiene el lado AB en la recta $5x + 3y = 34$ siendo el vértice B (8, −2) y el vértice opuesto el origen de coordenadas. Hallar las ecuaciones de los otros tres lados y las coordenadas del otro par de vértices opuestos A y C.

Solución

Calculamos la recta que pasa por O y es paralela a AB.

$$y - 0 = -\frac{5}{3}(x - 0) \Rightarrow 5x + 3y = 0$$

La ecuación de la recta que pasa por B (8, −2) y es perpendicular a OC.

$$y + 2 = \frac{3}{5}(x - 8) \Rightarrow 3x - 5y = 34$$

Las coordenadas de C son

$$\left.\begin{array}{l} 3x - 5y = 34 \\ 5x + 3y = 0 \end{array}\right\} C\ (3, -5)$$

Ecuación de la recta que pasa por O y es perpendicular a OC.

$$y - 0 = \frac{3}{5}(x - 0) \Rightarrow 3x - 5y = 0$$

Las coordenadas de A son

$$\left.\begin{array}{l} 3x - 5y = 0 \\ 5x + 3y = 34 \end{array}\right\} \Rightarrow A\ (5, 3)$$

— Las ecuaciones de los lados del rectángulo son

OA: $3x - 5y = 0$

AB: $5x + 3y = 34$

BC: $3x - 5y = 34$

OC: $5x + 3y = 0$

17. Dadas las ecuaciones de dos lados de un paralelogramo $8x + 3y + 1 = 0$, $2x + y - 1 = 0$ y la ecuación de una de sus diagonales $3x + 2y + 3 = 0$, determinar las coordenadas de los vértices de este paralelogramo.

Solución

Las dos ecuaciones de los lados del paralelogramo al no tener la misma pendiente se cortan en un punto.

$$\left.\begin{array}{r} 8x + 3y + 1 = 0 \\ 2x + y - 1 = 0 \end{array}\right\} (-2, 5)$$

Como este punto no pertenece a la diagonal, la intersección de la diagonal con cada una de las ecuaciones de los lados, nos determinan dos nuevos vértices opuestos del paralelogramo.

$$\left.\begin{array}{r} 8x + 3y + 1 = 0 \\ 3x + 2y + 3 = 0 \end{array}\right\} (1, -3)$$

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y - 1 = 0 \\ 3x + 2y + 3 = 0 \end{array}\right\} (5, -9)$$

Al ser estos dos últimos puntos opuestos, podemos determinar el centro del paralelogramo.

$$x = \frac{1 + 5}{2} = 3 \quad y = \frac{-3 - 9}{2} = -6 \Rightarrow (3, -6)$$

Como este punto es también el punto medio de los otros dos vértices (x, y) y (−2, 5).

$$\frac{x - 2}{2} = 3, \quad \frac{y + 5}{2} = -6 \Rightarrow (8, -17)$$

Los vértices del paralelogramo son

$$(-2, 5), (1, -3), (8, -17) \text{ y } (5, -9)$$

18. Los puntos A (1, 4) y C (−3, 6) son vértices opuestos de un rombo ABCD cuyo vértice B está en el eje de ordenadas. Hallar las coordenadas de los vértices B y D y el área del rombo.

Solución

Los lados de un rombo son iguales, al estar B en el eje de ordenadas será B (0, y), luego.

$$AB = BC$$

$$\sqrt{(1-0)^2 + (4-y)^2} = \sqrt{(-3-0)^2 + (6-y)^2}$$

$$4y = 28 \Rightarrow y = 7$$

El vértice B tiene de coordenadas B (0, 7)

— La recta que pasa por B y es perpendicular a la que pasa por A y C.

$$y - 7 = 2(x - 0) \Rightarrow 2x - y + 7 = 0$$

— La recta que pasa por A y es paralela a la recta que pasa por B y C.

$$y - 4 = \frac{1}{3}(x - 1) \Rightarrow x - 3y + 11 = 0$$

La intersección de ambas nos da

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y + 7 = 0 \\ x - 3y + 11 = 0 \end{array}\right\} D(-2, 3) \qquad \text{cuarto vértice}$$

— El área del rombo es:

$$A = \frac{D \times d}{2} = \frac{\sqrt{4^2 + 2^2} \times \sqrt{2^2 + (-4)^2}}{2} = \frac{20}{2} = 10u^2$$

19. Dadas las ecuaciones de dos lados de un rectángulo

$$x - 2y = 0 \, , \, x - 2y + 15 = 0$$

y la ecuación de una de sus diagonales $7x + y = 15$

Hallar los vértices del rectángulo.

Solución

Las ecuaciones de los lados corresponden a lados paralelos que al ser cortados por la diagonal dan lugar a dos vértices opuestos del rectángulo.

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y = 0 \\ 7x + y = 15 \end{array}\right\} A(2, 1) \qquad \left.\begin{array}{r} x - 2y + 15 = 0 \\ 7x + y - 15 = 0 \end{array}\right\} C(1, 8)$$

— Ecuación de la recta que pasa por C (1, 8) y es perpendicular a $x - 2y = 0$

$$y - 8 = -2(x - 1) \Rightarrow 2x + y - 10 = 0$$

— Intersección de esta recta con $x - 2y = 0$

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y - 10 = 0 \\ x - 2y = 0 \end{array}\right\} B(4, 2)$$

— Recta que pasa por A y es perpendicular a $x - 2y + 15 = 0$

$$y - 1 = -2(x - 2) \Rightarrow 2x + y - 5 = 0$$

— Intersección de esta recta con $x - 2y + 15 = 0$

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y - 5 = 0 \\ x - 2y + 15 = 0 \end{array}\right\} D(-1, 7)$$

20. Dos lados de un paralelogramo tienen por ecuaciones $y = 2x$, $2y = x$. Sabiendo que el centro del paralelogramo es el punto (2, 3) determinar las coordenadas de sus vértices y su área.

Solución

Las rectas dadas se cortan en A (0, 0), siendo el centro el punto P (2, 3), se tiene:

$$\frac{x + 0}{2} = 2, \frac{y + 0}{2} = 3 \Rightarrow C(4, 6)$$

— Ecuación de la recta que pasa por C (4, 6) y es paralela a $y = 2x$

$$y - 6 = 2(x - 4) \Rightarrow 2x - y - 2 = 0$$

— Ecuación de la recta que pasa por C (4, 6) y es paralela a $2y = x$

$$y - 6 = \frac{1}{2}(x - 4) \Rightarrow x - 2y + 8 = 0$$

— Los dos vértices restantes del paralelogramo.

$$\left.\begin{array}{r}2x - y - 2 = 0\\ 2y = x\end{array}\right\} B\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) \qquad \left.\begin{array}{r}x - 2y + 8 = 0\\ y = 2x\end{array}\right\} D\left(\frac{8}{3}, \frac{16}{3}\right)$$

Area = b × a·

altura = distancia de (4, 6) a la recta $2x - y = 0$

$$d = \frac{2 \times 4 - 1 \times 6}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\text{base} = \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{16}{3}\right)^2} = \frac{8\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{Area} = b \times a = \frac{8\sqrt{5}}{3} \times \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{16}{3}\,u^2$$

21. Dados dos vértices opuestos de un cuadrado A (3, 0) y C (−4, 1) hallar los otros dos vértices.

Solución

— La ecuación de la recta que pasa por A y C es

$$y - 0 = \frac{1 - 0}{-4 - 3}(x - 3) \Rightarrow x + 7y - 3 = 0 \left(m = -\frac{1}{7}\right)$$

— La ecuación de la otra diagonal que pasa por B y D tiene de pendiente m' = 7 y pasa por:

$$M\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$y - \frac{1}{2} = 7\left(x + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow 7x - y + 4 = 0$$

— Recta que pasa por A y B y forma con la que pasa por A y C un ángulo de 45°.

$$\text{tg } 45^{\circ} = \frac{m - m'}{1 + mm'} \Rightarrow 1 = \frac{-\frac{1}{7} - m'}{1 - \frac{1}{7}m'} \Rightarrow m' = -\frac{4}{3}$$

La ecuación de la recta que pasa por A y B es

$$y - 0 = -\frac{4}{3}(x - 3) \Rightarrow 4x + 3y - 12 = 0$$

— El punto B se obtiene como intersección de

$$\left.\begin{array}{l} 4x + 3y - 12 = 0 \\ \\ 7x - y + 4 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow B\,(0, 4)$$

— El punto D se obtiene

$$\frac{0 + x}{2} = -\frac{1}{2}\,;\ \frac{4 + y}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow D\,(-1, -3)$$

22. Se tiene el cuadrilátero ABCD cuyos vértices son A (3, 0), B (1, 4), C (−3, 2) y D (−1, −2). Comprobar que es un paralelogramo y determinar su centro y su área.

Solución

Recta que pasa por AB: $2x + y - 6 = 0$
Recta que pasa por BC: $x - 2y + 7 = 0$
Recta que pasa por CD: $2x + y + 4 = 0$
Recta que pasa por DA: $x - 2y - 3 = 0$

Se trata de un rectángulo de centro M (0, 1)

$$\text{Area} = b \times a = \sqrt{(4 - 0)^2 + (1 - 3)^2} \times \sqrt{(2 - 4)^2 + (-3 - 1)^2} =$$
$$= 20u^2$$

23. El punto E (1, −1) es el centro de un cuadrado, uno de cuyos lados está en la recta $x - 2y + 12 = 0$. Hallar las ecuaciones de las rectas en las que están los otros lados de este cuadrado así como las coordenadas de los vértices.

Solución

La pendiente de la recta dada es $m = \frac{1}{2}$. Como forma un ángulo de 45º en la diagonal que pasa por E, se tiene.

$$1 = \frac{m' - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2} m'} \Rightarrow m' = 3$$

Calculamos la diagonal que es una recta que pasa por E (1, −1) y de pendiente m' = 3

$$y + 1 = 3 (x - 1) \Rightarrow 3x - y - 4 = 0$$

El punto A se obtiene como intersección

$$\left. \begin{array}{r} 3x - y - 4 = 0 \\ x - 2y + 12 = 0 \end{array} \right\} A (4, 8)$$

El vértice opuesto C, se obtiene:

$$\left. \begin{array}{r} \frac{4 + x}{2} = 1 \\ \frac{8 + y}{2} = -1 \end{array} \right\} C (-2, -10)$$

La ecuación de la segunda diagonal ($m' = -\frac{1}{3}$) es

$$y + 1 = -\frac{1}{3} (x - 1) \Rightarrow x + 3y + 2 = 0$$

— La intersección de esta recta con la dada

$$\left. \begin{array}{r} x + 3y + 2 = 0 \\ x - 2y + 12 = 0 \end{array} \right\} B (-8, 2)$$

El objeto de B se obtiene

$$\left. \begin{array}{r} \frac{x - 8}{2} = 1 \\ \frac{y + 2}{2} = -1 \end{array} \right\} D (10, -4)$$

— Las ecuaciones de las rectas que contienen a los lados son:

$AB : x - 2y + 12 = 0$

$BC : 2x + y + 14 = 0$

$CD : x - 2y - 18 = 0$

$DA : 2x + y - 16 = 0$

24. Los puntos medios de los lados de un triángulo son P (5, 9), Q (6, 5) y R (3, 6). Hallar las ecuaciones de los lados.

Solución

— Los vértices son A (8, 8), B (2, 10) y C (4, 2).

— Las ecuaciones de los lados son:

$AB : x + 3y - 32 = 0$

$AC : 3x - 2y - 8 = 0$

$BC : 4x + y - 18 = 0$

25. Dados los puntos A (6, 1), B (2, 5) y C (−2, 1). Se pide:

a) Obtener analíticamente la ecuación de la circunferencia que pase por A, B y C.

b) El área del triángulo de vértices A, B y C.

Solución

a) La ecuación de la circunferencia es:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

— Por pasar por A (6, 1): $36 + 1 + 6D + E + F = 0$

— Por pasar por B (2, 5): $4 + 25 + 2D + 5E + F = 0$

— Por pasar por C (−2, 1): $4 + 1 - 2D + E + F = 0$

Resolviendo el sistema: $D = -4$, $E = -2$, $F = -11$

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 11 = 0$$

b) El área del triángulo es

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 16u^2$$

26. Una circunferencia pasa por los puntos $A(-1, 3)$ y $B(4, -2)$ y tiene su centro sobre la recta $2x + 3y + 8 = 0$.

Hallar su ecuación, las coordenadas del centro y el radio.

Solución

Llamando $C(x, y)$ al centro

$$CA = CB$$

$$\sqrt{(x + 1)^2 + (y - 3)^2} = \sqrt{(x - 4)^2 + (y + 2)^2}$$

que junto a la ecuación de la recta $2x + 3y + 8 = 0$ constituyen un sistema de solución $C(-1, -2)$.

$$\text{radio} = r = AC = \sqrt{(-1 + 1)^2 + (-2 - 3)^2} = 5$$

La ecuación de la circunferencia es

$$(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 5^2$$

27. Determinar la ecuación de la circunferencia de radio $2\sqrt{2}$ que pasa por el origen de coordenadas y cuyo centro está situado en la bisectriz del 2º cuadrante.

Solución

Llamando $C(x, y)$ al centro de la circunferencia que pasa por $(0, 0)$

$$\left.\begin{array}{l} (0 - x)^2 + (0 - y)^2 = (2\sqrt{2})^2 \\ y = -x \end{array}\right\}$$

de donde $x_1 = 2\ x_2 = -2$

Como se encuentra en el segundo cuadrante tomamos $x = -2$, por tanto.

$$C(-2, 2)$$

La circunferencia es de centro C (−2, 2) y radio $r = 2\sqrt{2}$

$$(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 8$$

28. Por el punto M (1, −2) se ha trazado una circunferencia de radio 5, tangente al eje X. Determinar el centro y la ecuación de la circunferencia.

Solución

El centro tiene como abscisa x = 5 y de ordenada desconocida C (5, y).

$$r = CM = \sqrt{(1-5)^2 + (-2-y)^2} = 5$$

$$16 + 4 + 4y + y^2 = 25 \Rightarrow y_1 = 1 \quad y_2 = -5$$

Los centros pueden ser C_1 (5, 1) y C_2 (5, −5) pero la circunferencia de centro (5, 1) no es tangente al eje OX, luego el centro único es C_2 (5, −5).

La ecuación es

$$(x - 5)^2 + (x + 5)^2 = 25$$

29. Dados los puntos A (4, 5) y B (2, 3). Calcular:

1) Ecuaciones de la circunferencia que pasa por A y B y su centro se encuentra en la recta $x - y - 1 = 0$

2) El centro y el radio de dicha circunferencia.

3) Ecuación de la recta tangente a la circunferencia trazada por M (6, 3).

4) Distancia del punto A a la tangente obtenida en *3)*.

Solución

1) Centro de la circunferencia C (x, y)

$$CA = CB$$

$$\sqrt{(x-4)^2 + (y-5)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2}$$

que junto a
$$\left.\begin{array}{r} 4y + 4x = 28 \\ x - y - 1 = 0 \end{array}\right\} \quad C\,(4,\ 3)$$

El radio es

$$r = AC = \sqrt{(4-4)^2 + (5-3)^2} = 2$$

La ecuación de la circunferencia es

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 2^2$$

3) Ecuación de la tangente trazada por M (6, 3) perteneciente a la circunferencia.

$$(x_0 - a)\,(x - x_0) + (y_0 - b)\,(y - y_0) = 0$$

$$(6-4)\,(x-6) + (3-3)\,(y-3) = 0$$

$$x = 6$$

4) Distancia del punto A (4, 5) a la recta $x - 6 = 0$

$$d = \frac{4-6}{\pm\sqrt{1^2}} = 2$$

30. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el origen de coordenadas, por el punto (4, 0) y es tangente a la bisectriz del primer cuadrante.

Solución

Al ser tangente la circunferencia y pasar por el origen de coordenadas, quiere decir que el centro se encuentra en la bisectriz del 2º - 4º cuadrante.

Llamando C (x, y) al centro

$$CO = CA$$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2}$$

$$y = -x$$

Operando: $x = 2,\ y = -2 \Rightarrow C\,(2, -2)$

$$r = \sqrt{(2-0)^2 + (-2-0)^2} = 2\sqrt{2}$$

de donde

$$(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 8$$

31. Hallar la ecuación de la recta que pasando por el punto de intersección de las rectas

$$2x - y = 0$$
$$5x + 8y = 7$$

sea paralela a la tangente a la circunferencia

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$$

en el punto P $(-1, 0)$

Solución

El punto de intersección de las dos rectas dadas es:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y = 0 \\ 5x + 8y = 7 \end{array}\right\} A\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Como el punto P $(-1, 0)$ pertenece a la circunferencia la tangente es

$$(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0$$
$$(-1 + 1)(x + 1) + (0 - 2)(y - 0) = 0 \Rightarrow y = 0$$

Al ser paralela a la anterior

$$y - \frac{2}{3} = m\left(x - \frac{1}{3}\right) \text{ siendo } m = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{3}$$

32. Los puntos A $(4, 0)$, B $(0, 2)$ y C $(4, 4)$ son vértices de un cuadrilátero inscrito en una circunferencia. Hallar las coordenadas del cuarto vértice D sabiendo que las diagonales AC y BD son perpendiculares.

Solución

La ecuación de la circunferencia es

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

— Pasa por A (4, 0) $\rightarrow$ $16 + 4D + F = 0$

— Pasa por B (0, 2) $\rightarrow$ $4 + 2E + F = 0$

— Pasa por C (4, 4) $\rightarrow$ $16 + 16 + 4E + 4D + F = 0$

$$D = -5,\ E = -4,\ F = 4$$

$$x^2 + y^2 - 5x - 4y + 4 = 0$$

La recta que pasa por A y C es perpendicular al eje OX luego la que pase por BD será paralela a OX y la ecuación de la recta que pasa por (0, 2) es $y = 2$.

Su intersección con la circunferencia.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 5x - 4y + 4 = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$x_1 = 5 x_2 = 0$$

Por tanto (5, 2) y (0, 2) son los puntos de corte con la recta y D (5, 2).

33. Hallar la ecuación del diámetro de la circunferencia.

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 16$$

que pasa por la mitad de la cuerda que intercepta en la recta

$$y - 2x - 3 = 0$$

Solución

La intersección de recta y circunferencia es

$$\left.\begin{array}{r} (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 16 \\ y - 2x - 3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 = -\frac{2}{5} \quad x_2 = -2$$

luego $y_1 = \frac{11}{5} \quad y_2 = -1$

Los puntos son $P_1\left(-\frac{2}{5}, \frac{11}{5}\right)$ y $P_2(-2, -1)$ y el punto medio $M\left(-\frac{6}{5}, \frac{3}{5}\right)$

Como el centro es C (2, − 1), la ecuación de la recta que pasa por C y M es:

$$y + 1 = \frac{\frac{3}{5} + 1}{-\frac{6}{5} - 2}(x - 2) \Rightarrow x + 2y = 0$$

34. Calcular el área del cuadrilátero cuyos vértices son los puntos de intersección de los ejes de coordenadas con la curva.

$$x^2 + y^2 + 4x - 11y - 12 = 0$$

Solución

$$\left.\begin{array}{r} x = 0 \\ x^2 + y^2 + 4x - 11y - 12 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A\ (0,\ 12)\ y\ C\ (0,\ -1)$$

$$\left.\begin{array}{r} y = 0 \\ x^2 + y^2 + 4x - 11y - 12 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow B\ (2,\ 0)\ y\ D\ (-6,\ 0)$$

$$\text{Area } \widehat{ABC} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 12 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -13$$

$$\text{Area } \widehat{ACD} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 12 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -6 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -39$$

$$\text{Area } \widehat{ABCD} = |-13| + |-39| = 52\ u^2$$

35. Dada la elipse

$$9x^2 + 25y^2 = 225$$

Hallar

1) Sus semiejes
2) Sus focos

3) Su excentricidad

4) Las ecuaciones de sus directrices

Solución

1) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

$$a = 5, \ b = 3$$

2) Focos

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$$

$$F(4, 0) \text{ y } F'(-4, 0)$$

3) Excentricidad

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$$

4) Ecuaciones de las directrices

$$x = \frac{a^2}{c} = \frac{25}{4} \qquad x = -\frac{a^2}{c} = -\frac{25}{4}$$

36. Un punto de una elipse dista de cada uno de sus focos 2 y 8 cm. respectivamente. Sabiendo que la distancia focal es 6 cm. Se pide.

1) Hallar la ecuación reducida de la elipse.

2) El área del triángulo formado por las tangentes a la elipse en los puntos de abscisa 4 cm. y la recta que une estos puntos.

Solución

1) Por definición de elipse: $PF + PF' = 2a$

luego: $2 + 8 = 2a \Rightarrow a = 5$

Como $2c = 6 \Rightarrow c = 3$ y $b = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

La ecuación de la elipse pedida es

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

2) Los puntos A y B de abscisa 4 cm. tienen como ordenada

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1\\ x=4\end{array}\right\} \Rightarrow A\left(4,\frac{12}{5}\right) \text{y } B\left(4,-\frac{12}{5}\right)$$

La ecuación de la tangente en $A\left(4,\frac{12}{5}\right)$es

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{4x}{25}+\frac{12}{5}\times\frac{y}{16}=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16x+15y=100$$

El punto C es la intersección de esta tangente con el eje OX, luego

$$C\left(\frac{25}{4},0\right)$$

$$\text{Area}=\frac{\text{base}\times\text{altura}}{2}=\frac{\left(\frac{12}{5}\times 2\right)\left(\frac{25}{4}-4\right)}{2}=\frac{54}{10}\ u^2$$

37. La excentricidad de una elipse es $e=\frac{1}{3}$, su centro coincide con el origen de coordenadas y uno de los focos es $F'(-2,0)$. Calcular la ecuación de la elipse.

Solución

$$e=\frac{c}{a};\ \text{como } c=2 \Rightarrow \frac{1}{3}=\frac{2}{a} \Rightarrow a=6$$

Si $a=6$ y $c=2$

$$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{36-4}=\sqrt{32}$$

La ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{32}=1$$

38. Hallar la ecuación de la elipse cuyos focos están situados en el eje de abscisas y son simétricos con respecto al origen de coordenadas, si se conoce la ecuación de la tangente a la elipse $3x+10y-25=0$ y su semieje menor es $b=2$.

Solución

$$F\,(c, 0) \text{ y } F'\,(-c, 0)$$

$$d_1 = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{3c - 25}{\sqrt{3^2 + 10^2}}$$

$$d_2 = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{-3c - 25}{\sqrt{3^2 + 10^2}}$$

$$d_1 \times d_2 = \frac{(3c - 25)\,(-3c - 25)}{3^2 + 10^2} = 2^2$$

$$625 - 9c^2 = 436 \Rightarrow c^2 = 21$$

$$a^2 = b^2 + c^2 = 4 + 21 = 25$$

La ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$$

39. Dada la hipérbola

$$16x^2 - 9y^2 = 144$$

Hallar:

1) Los semiejes a y b.
2) Los focos.
3) La excentricidad.
4) Ecuaciones de las directrices.

Solución

1) $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1 \Rightarrow a = 3 \quad y \quad b = 4$

2) $c^2 = a^2 + b^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow F\,(5, 0) \text{ y } F'\,(-5, 0)$

3) $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$

4) Directrices: $x = \frac{a^2}{c} = \frac{9}{5} \quad y \quad x = -\frac{a^2}{c} = -\frac{9}{5}$

40. Dada la hipérbola $2x^2 - y^2 = 9$, calcular vértices, focos y ecuación de la tangente en el punto de la hipérbola de abscisa 3 y ordenada positiva.

Solución

$$\frac{x^2}{9/2} - \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$$

Focos: $c^2 = a^2 + b^2 = \dfrac{9}{2} + 9 = \dfrac{27}{2} \Rightarrow c = 3\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ luego

$$F\left(3\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right) \text{ y } F'\left(-3\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right)$$

Vértices: A (a, 0) y A' (−a, 0) es decir

$$A\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, 0\right) \text{ y } F'\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

Para $x = 3 \Rightarrow 2 \times 3^2 - y^2 = 9 \Rightarrow y = \pm 3$

Por tanto P (3, 3)

Como P (3, 3) $\in$ Hipérbola, la ecuación de la tangente es

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{3x}{9/2} - \frac{3y}{9} = 1 \Rightarrow 2x - y = 3$$

41. La excentricidad de una hipérbola es $\dfrac{3}{2}$, su centro está en el origen de coordenadas y una de sus directrices se da mediante la ecuación $x = -8$.

Calcular la distancia del punto M de la hipérbola, de abscisa igual a 20, al foco correspondiente a la directriz dada.

Solución

$$\left.\begin{aligned} e &= \frac{3}{2} = \frac{c}{a} \\ x &= -8 = -\frac{a^2}{c} \end{aligned}\right\} \quad a = 12,\ c = 18$$

$$b^2 = c^2 - a^2 = 18^2 - 12^2 = 180 \Rightarrow b = 6\sqrt{5}$$

La ecuación de la hipérbola es

$$\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{180} = 1$$

El punto M $\in$ Hipérbola, tendrá de ordenada

$$\frac{20^2}{144} - \frac{y^2}{180} = 1 \Rightarrow y \pm 8\sqrt{5}$$

La distancia de M $(20, 8\sqrt{5})$ a F' $(-18, 0)$ es

$$d = \sqrt{(18 + 20)^2 + (8\sqrt{5})^2} = 42$$

42. Hallar la ecuación de la hipérbola si se conoce su excentricidad $e = \dfrac{5}{4}$ el foco F (5, 0) y la ecuación de la directriz correspondiente $5x - 16 = 0$.

Solución

$$\left.\begin{aligned} 5x - 16 = 0 \Rightarrow x = \frac{16}{5} = \frac{a^2}{c} \\ e = \frac{5}{4} = \frac{c}{a} \end{aligned}\right\} a = 4,\ c = 5$$

$$b^2 = c^2 - a^2 = 5^2 - 4^2 = 9 \Rightarrow b = 3$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

43. Determinar el valor del parámetro y la situación de las parábolas siguientes con respecto a los ejes coordenados.

1) $y^2 = 6x$ *3)* $y^2 = -4x$

2) $x^2 = 5y$ *4)* $x^2 = -y$

Solución

1) $p = 3$; en el semiplano derecho, simétricamente al eje OX.

2) $p = \frac{5}{2}$; en el semiplano superior, simétricamente al eje OY.

3) $p = -2$; en el semiplano izquierdo, simétricamente al eje OX.

4) $p = -\frac{1}{2}$; en el semiplano inferior, simétricamente al eje OY.

44. Hallar el centro y el radio de la circunferencia

$$x^2 + y^2 - Dx + Ey + F = 0$$

Siendo

D = la distancia entre los focos de la hipérbola $16x^2 - 9y^2 = 144$.

E = pendiente de la recta perpendicular a la que pasa por los puntos (5, 7) y (−1, 6).

F = la abscisa del foco de la parábola.

$$y^2 = 36x$$

Solución

1) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow a = 3, b = 4 \quad y \quad c = 5$

$$F\,(5, 0) \text{ y } F'\,(-5, 0)$$

La distancia entre los focos es $D = 10$

2) Pendiente de la recta

$$m = \frac{7-6}{5+1} = \frac{1}{6} \Rightarrow m' = -6 = E$$

3) Abscisa del foco

$$36 = 2p \Rightarrow p = 18 \quad y \quad \frac{p}{2} = 9 = F$$

La ecuación de la circunferencia es:

$$x^2 + y^2 - 10x - 6y + 9 = 0$$

$$a = 5 \quad y \quad b = 3 \Rightarrow r = \sqrt{a^2 + b^2 - F} = 5$$

El centro es C (5, 3) y el radio 5.

45. Dada la curva

$$y = 3x^2 + 5$$

y la recta $y = 4x + m$, determinar m para que dicha recta sea tangente a la curva.

Solución

Se calcula la intersección de las dos líneas con la condición de que los dos puntos se confundan en uno, luego basta que el discriminante en la ecuación de 2.º grado que resulta se anule.

$$\left.\begin{array}{l} y = 3x^2 + 5 \\ \\ y = 4x + m \end{array}\right\} \quad 3x^2 + 5 = 4x + m$$

$$3x^2 - 4x + (5 - m) = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow 16 - 60 + 12m = 0$$

$$m = \frac{11}{3}$$

10. Traslaciones, giros y simetrías

CONCEPTOS TEORICOS

— **Movimiento en el plano:** Es una aplicación del plano en sí mismo que conserva la distancia.

— **Traslación**

$$x' = x + a$$
$$y' = y + b$$

siendo (a, b) las componentes del vector.

— **Giro** G [(a, b), α)]

$$x' - a = (x - a)\cos\alpha - (y - b)\operatorname{sen}\alpha$$
$$y' - b = (x - a)\operatorname{sen}\alpha + (y - b)\cos\alpha$$

— **Simetría central** de centro M (a, b).

$$x' = -x + 2a$$
$$y' = -y + 2b$$

— **Simetría axial** de eje $Ax + By + C = 0$

$$x' = x - 2A\,\frac{Ax + By + C}{A^2 + B^2}$$

$$y' = y - 2B\,\frac{Ax + By + C}{A^2 + B^2}$$

PROBLEMAS

1. Una traslación viene definida por el par de puntos homólogos P (2, 3) y P' (4, 7). Determinar:

   1) Ecuaciones de la traslación

   2) El transformado del punto A (−2, −3)

   3) La transformada de la recta $x + 2y - 5 = 0$

   4) La transformada de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$

Solución

1) Las ecuaciones de la traslación son

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + a \\ y' &= y + b \end{aligned}\right\} \text{ como P (2, 3) y P' (4, 7)} \qquad \left.\begin{aligned} 4 &= 2 + a \\ 7 &= 3 + b \end{aligned}\right\} \begin{aligned} a &= 2 \\ b &= 4 \end{aligned}$$

Por tanto

$$x' = x + 2$$
$$y' = y + 4$$

2) El transformado de A (−2, −3) es

$$\left.\begin{aligned} x' &= -2 + 2 = 0 \\ y' &= -3 + 4 = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A' (0, 1)$$

3) La transformada de la recta $x + 2y - 5 = 0$ se obtiene así

$$x = x' - 2$$
$$y = y' - 4$$

luego

$$(x' - 2) + 2(y' - 4) = 5 \Rightarrow x' + 2y' = 15$$

quitando comillas

$$x + 2y - 15 = 0$$

4) La transformada de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ es

$$(x' - 2)^2 + (y' - 4)^2 = 4 \Rightarrow$$

quitando comillas

$$\Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 4$$

2. Demostrar que la traslación conserva las distancias y por lo tanto es un movimiento.

Solución

Sean los puntos P (x_1, y_1) y Q (x_2, y_2) de un plano y P' (x'_1, y'_1) y Q' (x'_2, y'_2) sus imágenes en la traslación $T_{(a, b)}$ de ecuaciones

$$x' = x + a$$

$$y' = y + b$$

Se tiene que demostrar que

$$d(P'Q') = d(PQ)$$

En efecto

$$d(P'Q') = \sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y'_2 - y'_1)^2} =$$

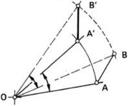
$$= \sqrt{(x_2 + a - x_1 - a)^2 + (y_2 + b - y_1 - b)^2} =$$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = d(PQ)$$

3. Demostrar que el giro es un movimiento, es decir conserva las distancias.

Solución

Sea un giro de centro O y amplitud α y dos puntos del plano A y B que se transforman en A' y B' respectivamente.



Demostraremos que $\overset{\triangle}{AOB} = \overset{\triangle}{A'OB'}$

Por definición de giro

$d\,(OA) = d\,(OA')$

$d\,(OB) = d\,(OB')$

$A\hat{O}A' = B\hat{O}B' = \varphi$

Además

$$\widehat{A'OB'} = \widehat{BOB'} - \widehat{BOA'} = \widehat{AOA'} - \widehat{BOA'} = \widehat{AOB}$$

y dos triángulos con dos lados iguales e igual el ángulo comprendido son iguales entre sí, luego

$$\widehat{AOB} = \widehat{A'OB'}$$

Como consecuencia

$$d\,(AB) = d\,(A'B')$$

El giro es un movimiento.

4. Dado el giro de centro M (1, 2) y amplitud 60°

Hallar:

1) Ecuaciones del giro
2) El homólogo del punto A (3, 0)

Solución

1)
$$\begin{cases} x' - a = (x - a)\cos\varphi - (y - b)\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ y' - b = (x - a)\,\mathrm{sen}\,\varphi + (y - b)\cos\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' - 1 = (x - 1)\cos 60^\circ - (y - 2)\,\mathrm{sen}\,60^\circ \\ y' - 2 = (x - 1)\,\mathrm{sen}\,60^\circ + (y - 2)\cos 60^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = (x-1)\dfrac{1}{2} - (y-2)\dfrac{\sqrt{3}}{2} + 1 \\ \\ y' = (x-1)\dfrac{\sqrt{3}}{2} + (y-2)\dfrac{1}{2} + 2 \end{cases}$$

2) El homólogo de A (3, 0) es

$$\begin{cases} x' = (3-1)\dfrac{1}{2} - (0-2)\dfrac{\sqrt{3}}{2} + 1 = 2 + \sqrt{3} \\ \\ y' = (3-1)\dfrac{\sqrt{3}}{2} + (0-2)\dfrac{1}{2} + 2 = \sqrt{3} + 1 \end{cases}$$

$A'(2 + \sqrt{3}, \sqrt{3} + 1)$

5. Determinar las componentes del vector, las coordenadas del nuevo origen y el ángulo α en cada caso, si las ecuaciones de transformación de coordenadas se dan mediante las siguientes igualdades.

1) $y = y' + 3$
$x = x' - 2$

2) $x = x' - 1$
$y = y' + 2$

3) $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x' + \dfrac{\sqrt{2}}{2}y'$
$y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}x' + \dfrac{\sqrt{2}}{2}y'$

4) $x' - 1 = -(y - 2)$
$y' - 2 = x - 1$

Solución

1) Las ecuaciones se pueden poner de esta forma

$$\left.\begin{array}{l} x' = x + 2 \\ \\ y' = y - 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Traslación de vector de componentes } 2 \; y \; -3$$

2) Se ponen las ecuaciones así

$$\left.\begin{array}{l} x' = x + 1 \\ y' = y - 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Traslación de vector de componentes } 1 \; y \; -2$$

3) Despejando x' e y' en función de x e y.

$$x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y)$$

$$y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y)$$

Se trata de un giro de centro el origen y amplitud 45º.

4) Se trata de un giro de centro M (1, 2) y amplitud 90º.

6. Determinar las coordenadas del nuevo origen y el ángulo α, en el que han girado los ejes, si las ecuaciones de transformación de coordenadas se determinan por las siguientes igualdades.

1) $x = \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'$

$y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'$

2) $x = \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'$

$y = -\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'$

3) $x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y)$

$y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y)$

4) $x' = x + 4$

$y' = y - 2$

Solución

1) Se puede expresar como

$$\left.\begin{array}{l} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{array}\right\} \Rightarrow G\ (O,\ 60º)$$

2) Se puede expresar como

$$\left.\begin{array}{l} x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \\ y' = \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}y \end{array}\right\} \Rightarrow G\ (O,\ 30º)$$

3) Se trata de un giro G (O, 45°).

4) Se trata de una traslación de vector de componentes 4 y − 2.

7. Dados tres puntos A (5, 5), B (2, −1) y C (12, −6), hallar sus coordenadas en el nuevo sistema, si el origen de coordenadas se ha trasladado al punto B y los ejes coordenados han girado un ángulo $\alpha = 135°$.

Solución

$$\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{y} \quad \text{sen } 135° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Las ecuaciones del giro son

$$x' - 2 = (x - 2)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - (y + 1)\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y' + 1 = (x - 2)\frac{\sqrt{2}}{2} + (y + 1)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

El transformado del punto A (5, 5) es

$$\left.\begin{aligned} x' - 2 &= (5 - 2)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - (5 + 1)\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y' + 1 &= (5 - 2)\frac{\sqrt{2}}{2} + (5 + 1)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow A'\left(2 - \frac{9\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2} - 1\right)$$

El transformado del punto B (2, −1) es B' (2, −1), es invariante.

El transformado del punto C (12, −6) es

$$\left.\begin{aligned} x' - 2 &= (12 - 2)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - (-6 + 1)\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y' + 1 &= (12 - 2)\frac{\sqrt{2}}{2} + (-6 + 1)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow C'\left(2 - \frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{15\sqrt{2}}{2} - 1\right)$$

8. El origen de coordenadas se ha trasladado al punto O' $(-1, 2)$ y los ejes de coordenadas han girado un ángulo $\alpha = 180^\circ$. Las coordenadas de los puntos A' $(3, 2)$, B' $(2, -3)$ y C' $(13, -13)$ están determinadas en el nuevo sistema. Hallar las coordenadas de estos mismos puntos en el sistema de coordenadas primitivo.

Solución

$$x' - a = (x - a) \cos 180^\circ - (y - b) \operatorname{sen} 180^\circ$$

$$y' - b = (x - a) \operatorname{sen} 180^\circ + (y - b) \cos 180^\circ$$

$$x = -x' - 2$$

$$y = -y' + 4$$

de donde

$$A(-5, 2),\ B(-4, 7) \text{ y } C(-15, 17)$$

9. Dados los puntos A $(3, -1)$ y B $(2, 1)$, determinar:

1) Las coordenadas del punto A' simétrico del punto A con respecto al punto B.

2) Las coordenadas del punto B' simétrico del punto B con respecto al punto A.

Solución

El centro C (a, b) cumple, siendo M (x, y) y M' (x', y')

$$a = \frac{x + x'}{2}$$

$$b = \frac{y + y'}{2}$$

Se tiene

1) A $(3, -1)$, B $(2, 1)$ y A' (x', y')

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{3 + x'}{2} = 2 \Rightarrow x' = 1 \\ \dfrac{-1 + y'}{2} = 1 \Rightarrow y' = 3 \end{array}\right\} A'(1, 3)$$

2) B (2, 1), A (3, −1) y B' (x', y')

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{2 + x'}{2} = 3 \\[2ex] \dfrac{1 + y'}{2} = -1 \end{array}\right\} \text{B'}\ (4, -3)$$

10. Se considera un paralelogramo ABCD dos de cuyos vértices consecutivos se conocen A (5, 3) y B (1, 8) siendo el centro del paralelogramo el punto M (2, −1). ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices C y D?

Solución

Como C es el simétrico de A respecto del centro M

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{5 + x}{2} = 2 \\[2ex] \dfrac{3 + y}{2} = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{C}\ (-1, -5)$$

Como D es el simétrico de B respecto del centro M

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1 + x}{2} = 2 \\[2ex] \dfrac{8 + y}{2} = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{D}\ (3, -10)$$

11. Determinar las coordenadas del punto M' simétrico del M (1, 2) con respecto a la recta que pasa por los puntos A (1, 0) y B (−1, −2).

Solución

La ecuación de la recta que pasa por A y B es

$$y - 0 = \frac{-2 - 0}{-1 - 1}(x - 1) \Rightarrow x - y - 1 = 0$$

Las ecuaciones de la simetría axial son:

$$x' = x - 2A\frac{Ax + By + C}{A^2 + B^2} = 1 - 2 \times 1\,\frac{1 \times 1 - 1 \times 2 - 1}{1^2 + (-1)^2} = 3$$

$$y' = y - 2B\frac{Ax + By + C}{A^2 + B^2} = 2 - 2(-1)\,\frac{1 \times 1 - 1 \times 2 - 1}{1^2 + (-1)^2} = 0$$

$$M'(3, 0)$$

12. Hallar las coordenadas del punto simétrico del origen de coordenadas respecto de la recta $4x + 3y = 50$.

Solución

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - 8 \times \frac{-50}{4^2 + 3^2} = x + 16 \\ y' &= y - 6 \times \frac{-50}{4^2 + 3^2} = y + 12 \end{aligned}\right\} \; O'(16, 12)$$

13. En la simetría de eje $2x + 3y = 6$, se pide hallar:

1) La imagen del punto $A(2, -3)$

2) La imagen del origen de coordenadas

3) La imagen de la recta que pasa por el origen O y por el punto A

Solución

Las ecuaciones de la simetría son:

$$x' = x - 2 \times 2\,\frac{2x + 3y - 6}{2^2 + 3^2}$$

$$y' = y - 2 \times 3\,\frac{2x + 3y - 6}{2^2 + 3^2}$$

1) El simétrico de A (2, −3) es

$$\left.\begin{array}{l} x' = 2 - 4 \times \dfrac{-11}{13} = \dfrac{70}{13} \\ y' = -3 - 6 \times \dfrac{-11}{13} = \dfrac{27}{13} \end{array}\right\} \quad A'\left(\frac{70}{13}, \frac{27}{13}\right)$$

2) El simétrico del punto O (0, 0) es

$$O'\left(\frac{24}{13}, \frac{36}{13}\right)$$

3) La simétrica de la recta que pasa por OA es la recta que pasa por O'A' luego:

$$y - \frac{36}{13} = \frac{\dfrac{27}{13} - \dfrac{36}{13}}{\dfrac{70}{13} - \dfrac{24}{13}}\left(x - \frac{24}{13}\right)$$

$$y - \frac{36}{13} = -\frac{9}{46}\left(x - \frac{24}{13}\right)$$

14. Dados los puntos M (3, 1), N (−1, 5) y P (−3, −1), hallar sus coordenadas en el nuevo sistema, si los ejes han girado un ángulo.

1) −45° *2)* 90° *3)* −90° *4)* 180°

Solución

1) Las ecuaciones del giro son ($\alpha = -45°$)

$$x' = x \cos(-45°) - y \operatorname{sen}(-45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y)$$

$$y' = x \operatorname{sen}(-45°) + y \cos(-45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}(y - x)$$

M' $(2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, N' $(2\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$ y P' $(-2\sqrt{2}, \sqrt{2})$

2) Las ecuaciones del giro son ($\alpha = 90°$)

$$x' = x \cos 90° - y \operatorname{sen} 90° = -y$$

$$y' = x \operatorname{sen} 90° + y \cos 90° = x$$

$$M' (-1, 3),\ N' (-5, -1) \text{ y } P' (1, -3)$$

3) Las ecuaciones del giro son ($\alpha = -90°$)

$$x' = x \cos (-90°) - y \operatorname{sen} (-90°) = y$$

$$y' = x \operatorname{sen} (-90°) + y \cos (-90°) = -x$$

$$M' (1, -3),\ N' (5, 1) \text{ y } P' (-1, 3)$$

4) Las ecuaciones del giro son ($\alpha = 180°$)

$$x' = x \cos 180° - y \operatorname{sen} 180° = -x$$

$$y' = x \operatorname{sen} 180° + y \cos 180° = -y$$

$$M' (-3, -1),\ N' (1, -5),\ P' (3, 1)$$

15. Hay que descomponer un giro de centro (4, 2) y amplitud 90° en producto de dos simetrías. Si el primer eje es la recta $y = 2$, determinar la ecuación del segundo eje, analítica y gráficamente.

Solución

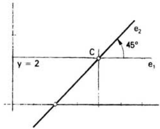
$$G (C, 90°) = S_{\varepsilon_1} \times S_{\varepsilon_2}$$

Los ejes de simetría forman un ángulo de 45°, luego la recta pasa por el punto C (4, 2) y corta al eje OX en el punto (2, 0).

La ecuación de este eje es

$$y - 0 = \frac{2 - 0}{4 - 2} (x - 2) \Rightarrow y = x - 2$$

Gráficamente



16. Hay que descomponer un giro de centro M (7, 5) y amplitud 270° en producto de dos simetrías. Si el primer eje es la recta y = 5, determinar la ecuación del 2.° eje.

Solución

$$G(M, 270°) = S_{e_1} \times S_{e_2}$$

$$e_1 \equiv y - 5 = 0$$

$e_2 \equiv$ recta que pasa por M (7, 5) y N (12, 0) es decir

$$y = 12 - x$$

17. Se multiplica la simetría de eje x = y por la de eje x = 6. ¿Qué clase de transformación se obtiene? Calcular los elementos determinantes de esta transformación y el punto homólogo del origen de coordenadas?

Solución

1) El producto de las dos simetrías es un giro de centro el punto de corte de los ejes y de ángulo el doble del ángulo que forman los ejes de simetría.

$$S_{x=y} \times S_{x=6} = G\,[(6, 6), 90^\circ]$$

2) El transformado del punto O (0, 0) por el giro se obtiene así:

$$x' - a = (x - a)\cos\alpha - (y - b)\operatorname{sen}\alpha$$

$$x' - b = (x - a)\operatorname{sen}\alpha + (y - b)\cos\alpha$$

luego

$$x' - 6 = (x - 6)\cos 90^\circ - (y - 6)\operatorname{sen} 90^\circ = -(y - 6)$$

$$y' - 6 = (x - 6)\operatorname{sen} 90^\circ + (y - 6)\cos 90^\circ = x - 6$$

$$\left.\begin{array}{l} x' = 12 - y \\ y' = x \end{array}\right\} \Rightarrow O'\,(12, 0)$$

18. Hallar el transformado del punto A (3, 5) y de la recta $3x + 2y = 6$ al aplicarle los siguientes movimientos.

$$T_{(2,\,3)} \times G\,[(0, 0), 90^\circ] \times S_{y=x}$$

Solución

Las ecuaciones de estos movimientos son:

a) Traslación	*b)* Giro	*c)* Simetría
$x = x + 2$	$x' = -y$	$x' = y$
$y' = y + 3$	$y' = x$	$y' = x$

$$A\,(3, 5) \xrightarrow{T} A'\,(5, 8) \xrightarrow{G} A''\,(-8, 5) \xrightarrow{S} A'''\,(5, -8)$$

Para la recta tomamos dos puntos M (2, 0) y N (0, 3) y los transformamos.

$$M\,(2, 0) \xrightarrow{T} M'\,(4, 3) \xrightarrow{G} M''\,(-3, 4) \xrightarrow{S} M'''\,(4, -3)$$

$$N\,(0, 3) \xrightarrow{T} N'\,(2, 6) \xrightarrow{G} N''\,(-6, 2) \xrightarrow{S} N'''\,(2, -6)$$

La ecuación de la recta que pasa por (4, −3) y (2, −6) es:

$$y + 3 = \frac{-6 + 3}{2 - 4} (x - 4) \Rightarrow 3x - 2y - 18 = 0$$

19. Dado el giro de centro O y amplitud 45°, dado el giro de centro O y amplitud 90° y la traslación definida por el vector de componentes 3 y 4. Hallar el transformado del punto A (1, 6) al aplicarle:

a) Traslación × G (O, 45º)

b) G (O, 45º)× Traslación

c) Traslación × G (O, 45º) × G' (O, 90°)

d) Traslación × G' (O, 90°) × G (O, 45°)

Solución

Las ecuaciones son:

— G (O, 45º)

$$x' = x \cos 45^o - y \operatorname{sen} 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2} (x - y)$$

$$y' = x \operatorname{sen} 45^o + y \cos 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2} (x + y)$$

— G (O, 90º)

$$x' = x \cos 90^o - y \operatorname{sen} 90^o = -y$$

$$y' = x \operatorname{sen} 90^o + y \cos 90^o = x$$

— Traslación

$$x' = x + 3$$

$$y' = y + 4$$

Por tanto

$$A (1, 6) \xrightarrow{T} A' (4, 10) \xrightarrow{G} A'' (-3 \sqrt{2}, 7 \sqrt{2})$$

$$A (1, 6) \xrightarrow{G} A' (- \frac{5 \sqrt{2}}{2}, \frac{7 \sqrt{2}}{2}) \xrightarrow{T} A'' (- \frac{5 \sqrt{2}}{2} + 3, \frac{7 \sqrt{2}}{2} + 4)$$

$$A(1,6) \xrightarrow{T} A'(4,10) \xrightarrow{G} A''(-3\sqrt{2}, 7\sqrt{2}) \xrightarrow{G'} A'''(-7\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$$
$$A(1,6) \xrightarrow{T} A'(4,10) \xrightarrow{G'} A''(-10, 4) \xrightarrow{G} A'''(-7\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$$

20. Dada la traslación definida por el vector de componentes 1 y 2, dado el giro de centro el origen de coordenadas y amplitud 90º y dada la simetría axial de eje $x = 0$. Hallar:

1) El transformado del punto A (3, 4) al aplicarle el movimiento $S \times G \times T$.

2) La recta transformada de $4x + 3y = 12$ al aplicarle el movimiento $T \times S \times G$.

Solución

Las ecuaciones son:

a) Traslación	*b)* Giro	*c)* Simetría axial
$x' = x + 1$	$x' = -y$	$x' = x$
$y' = y + 2$	$y' = x$	$y' = -y$

1) Por tanto:

$$A(3,4) \xrightarrow{S} A'(3,-4) \xrightarrow{G} A''(4,3) \xrightarrow{T} A'''(5,5)$$

2) La transformada de la recta $4x + 3y = 12$ lo hacemos calculando los homólogos de los puntos M (3, 0) y P (0, 4).

$$M(3,0) \xrightarrow{T} M'(4,2) \xrightarrow{S} M''(4,-2) \xrightarrow{G} M'''(2,4)$$
$$P(0,4) \xrightarrow{T} P'(1,6) \xrightarrow{S} P''(1,-6) \xrightarrow{G} P'''(6,1)$$

La ecuación de la recta que pasa por (2, 4) y (6, 1) es:

$$y - 4 = \frac{1-4}{6-2}(x-2) \Rightarrow 3x + 4y = 22$$

21. En un plano en el cual se ha definido un sistema rectangular de ejes OX, OY, se consideran cuatro simetrías axiales S_1, S_2, S_3, y S_4 cuyos ejes respectivos son las rectas de ecuaciones.

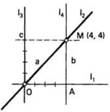
$$(l_1)\ y = 0\ ;\ (l_2)\ y = x\ ;\ (l_3)\ x = 0\ ;\ (l_4)\ x = 4$$

Se pide:

1) Demostrar que el producto de esas simetrías es un giro: $G = S_1 \times S_2 \times S_3 \times S_4$, del cual se pide el centro M y el ángulo de giro α.

2) Hallar la ecuación de la figura transformada de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ por el giro G (M, α)

Solución



$$l_1 \times l_2 \times l_3 \times l_4 = (l_1 \times l_2) \times (l_3 \times l_4) = G\ (O,\ 90^{\circ}) \times T_{\overrightarrow{20A}}$$

Descomponiendo estos movimientos en producto de simetrías axiales con un eje común.

$$G\ (O,\ 90^{\circ}) = S_a \times S_c$$

$$T_{20A} = S_c \times S_b$$

de donde:

$$G\ (O,\ 90^{\circ}) \times T_{\overrightarrow{20A}} = (S_a \times S_c) \times (S_c \times S_b) = S_a \times S_b = G\ (M,\ 90^{\circ})$$

se trata de un giro de centro M (4, 4) y amplitud 90°.

2) Las ecuaciones del giro son:

$$\left.\begin{array}{l} x' - 4 = (x - 4) \cos 90^{\circ} - (y - 4) \operatorname{sen} 90^{\circ} \\ y' - 4 = (x - 4) \operatorname{sen} 90^{\circ} + (y - 4) \cos 90^{\circ} \end{array}\right\} \begin{array}{l} x' = 8 - y \\ y' = x \end{array}$$

Sustituyendo en la ecuación de la circunferencia.

$$\begin{array}{l} x = y' \\ y = 8 - x' \end{array}$$

resulta

$$x^2 + y^2 = 25 \Rightarrow y'^2 + (8 - x')^2 = 25$$

y quitando comillas

$$(x - 8)^2 + y^2 = 25$$

22. Dos rectas m y n se cortan formando un ángulo recto. Se toman las rectas m y n como ejes de abscisas y ordenadas respectivamente y en dicho sistema de coordenadas se consideran los puntos P (2, −3) y Q (5, −1).

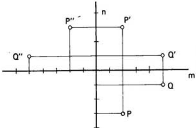
Se pide:

1) Si S_m y S_n son las simetrías axiales respecto de m y n, hallar las coordenadas de P'' y Q'' transformados de P y Q en la transformación producto $S_m \times S_n$.

2) Calcular la amplitud del giro equivalente a $S_m \times S_n$.

3) Calcular la recta transformada de la que pasa por los puntos P y Q al aplicarle la transformación producto $S_m \times S_n$.

Solución



Resulta

P' (2, 3), Q' (5, 1)

P'' (−2, 3), Q'' (−5, 1)

2) El ángulo que forman m y n es 90° por tanto

$$S_m \times S_n = G(O, 180°)$$

3) La ecuación de la recta que pasa por P y Q es

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \Rightarrow y + 3 = \frac{-1 + 3}{5 - 2}(x - 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x - 3y - 13 = 0$$

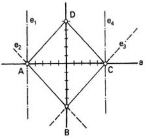
La ecuación de la recta transformada pasa por P'' y Q'', por tanto

$$y - 3 = \frac{1 - 3}{-5 + 2}(x + 2) \Rightarrow 3y - 2x - 13 = 0$$

23. Consideremos el cuadrado de vértices $A(-5, 0)$, $B(0, -5)$, $C(5, 0)$ y $D(0, 5)$ y las simetrías axiales Se_1, Se_2, Se_3 y Se_4 cuyos ejes respectivos son las ecuaciones $x = -5$, la recta AB, la recta BC y la recta $x = 5$.

Demostrar que el producto $Se_1 \times Se_2 \times Se_3 \times Se_4$ es un giro, determinando sus componentes y hallar los transformados de los cuatro vértices del cuadrado ABCD.

Solución



$$Se_1 \times Se_2 \times Se_3 \times Se_4 =$$
$$(Se_1 \times Se_2) \times (Se_3 \times Se_4) =$$
$$G(A, 90^o) \times G(C, 90^o) =$$
$$= (Se_2 \times Sa) \times (Sa \times Se_3) =$$
$$= Se_2 \times Se_3 = G(B, 180^o)$$

El giro $G(B, 180^o)$ es lo mismo que una simetría central de centro el punto B, de ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x + x'}{2} = 0 \\[2ex] \dfrac{y + y'}{2} = -5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x' = -x \\ y' = -10 - y \end{array}$$

Los transformados de los puntos A, B, C y D son

$$\left.\begin{array}{r} x' = -(-5) = 5 \\ y' = -10 - 0 = -10 \end{array}\right\} A'(5, -10)$$

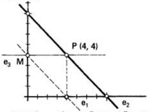
$$\left.\begin{array}{r} x' = 0 \\ y' = -10 - (-5) = -5 \end{array}\right\} B'(0, -5)$$

$$\left.\begin{array}{r} x' = -5 \\ y' = -10 - 0 = -10 \end{array}\right\} C'(-5, -10)$$

$$\left.\begin{array}{r} x' = 0 \\ y' = -10 - 5 = -15 \end{array}\right\} D'(0, -15)$$

24. Hallar las coordenadas del centro M del giro $G_2 = T \times G_1$ siendo T la traslación que transforma el origen de coordenadas O en el punto P (4, 4) y G_1 el giro de centro P y amplitud 90°. Determinar también las coordenadas del punto A' homólogo del A (1, 1) en el giro G_2.

Solución



Descomponemos tanto la traslación como el giro en el producto de dos simetrías axiales de la siguiente forma:

$$T \times G_1 = (Se_1 \times Se_2) \times (Se_2 \times Se_3) = Se_1 \times (Se_2 \times Se_2) \times Se_3 =$$
$$= Se_1 \times Se_3 = G\,(M, 90°)$$

Las ecuaciones del giro son

$$x' - a = (x - a)\cos\alpha - (y - b)\,\text{sen}\,\alpha$$
$$y' - b = (x - a)\,\text{sen}\,\alpha + (y - b)\cos\alpha$$

Sustituyendo:

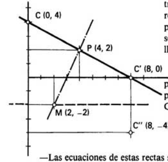
$$\left.\begin{array}{l} x' = 3 \\ y' = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow A'(3, 5)$$

25. Dada la circunferencia de centro C (0, 4) y radio 3, determinar:

1) Analítica y gráficamente el centro del giro igual al producto de dos simetrías axiales que transforman C (0, 4) en C' (8, 0) y éste en C'' (8, −4).

2) Determinar la circunferencia transformada de la primera en el giro.

Solución



Uniendo C con C', el eje de simetría que transforma C en C' es la recta perpendicular a la que pasa por C y C' por el punto medio del segmento CC'. El punto medio lo llamamos P.

Uniendo C' con C'', la recta perpendicular a la que pasa por C' y C'' por el punto medio del segmento C' C'' es el eje de simetría segundo.

—Las ecuaciones de estas rectas son:

El punto P (4, 2) y la pendiente de la recta que pasa por C y C' es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 4}{8 - 0} = -\frac{1}{2} \Rightarrow m' = 2$$

luego

$$y - 2 = 2(x - 4) \Rightarrow y = 2x - 6$$

La recta, segundo eje de simetría es $y = 2$.

Las dos rectas se cortan en M $(2, -2)$.

El producto de las dos simetrías es un giro de centro M $(2, -2)$ y amplitud doble del ángulo que forman S_1 S_2.

2) La circunferencia transformada de la primera es centro C'' y radio 3.

$$(x - 8)^2 + (y + 4)^2 = 3^2$$

APENDICE

CONCURSO OPOSICION PARA EL INGRESO EN EL CUERPO DE PROFESORES DE E.G.B.

A) Prueba eliminatoria de madurez cultural. Junio de 1974.

Texto:

En el campo de los estudios elementales, pocas cosas han variado tanto de poco tiempo aquí, como el lenguaje de los Cuestionarios de Matemáticas. Palabras como conjunto, correspondencia, retículo, grupo, morfismo, Topología, pudieran hacer creer que el objeto sobre el que la Matemática investiga, no es el mismo de antes. Pero el conocedor de las Matemáticas, aun de las que se llaman elementales, sabe identificar en ese lenguaje la expresión de muchas propiedades, que atribuía solamente a los números. Sólo que esas propiedades han sido encontradas también, en conjuntos no numéricos y su estudio sistemático ha dado origen al concepto de estructura matemática.

Cuestiones:

1. Cite los axiomas que definen la estructura de grupo.

2. Cite cuál de ellos deja de cumplirse al considerar los números naturales con la adición.

3. Cite cuál de ellos deja de cumplirse al considerar el conjunto de racionales no negativos (es decir los racionales positivos y el cero), con la multiplicación.

Texto:

El estudio de una estructura, sin referencia intuitiva a objeto alguno, permite deducir cuáles son los cálculos permisibles y los resultados alcanzables, en cada modelo concreto de tal estructura.

Cuestiones:

4. Como aclaración y extensión de ese párrafo pruebe que en todo grupo hay solución única, para cada ecuación lineal con una incógnita.

5. Razone que, en cambio, no puede decirse lo mismo cuando se calcula en un anillo.

6. Razone qué puede decirse sobre esa cuestión, cuando se calcula en un cuerpo.

Texto:

Esas estructuras citadas hasta aquí están formadas por un conjunto subyacente y una operación. Entre las aplicaciones que pueden establecerse de uno de los conjuntos hacia el otro, merecen particular interés las que se llaman morfismos.

Cuestiones:

7. Explique qué se entiende por morfirmo.

8. Particularice qué se entiende por isomorfismo.

9. Ponga un ejemplo de morfismo de (Z, +) hacia (Z, +).

CONCURSO OPOSICION PARA INGRESO EN EL CUERPO DE PROFESORES DE E.G.B.

A) Prueba eliminatoria de madurez cultural. Junio de 1975.

Texto:

Entre las estructuras algebráicas, figuran algunas en las que interviene una ley de composición externa. Una estructura de este tipo se suele designar conuna terna (D, E, .), en la que E representa el soporte de la misma, D el dominio de operadores y (.) el signo de dicha ley. Los casos más importantes de tales estructuras son aquellos en los que E o D o ambos conjuntos están dotados de una o más leyes internas, relacionadas con la ley externa de la estructura mediante ciertas condiciones.

En particular son interesados los espacios vectoriales (K, V, .), y los módulos (A, M, .), cuyo estudio es parte de la llamada álgebra lineal. En ellos los soportes V y M son grupos abelianos y sus respectivos dominios K y A son un cuerpo y un anillo cualesquiera.

El estudio de un espacio vectorial consta del conocimiento de sus propiedades (de las que se siguen las reglas de cálculo en el mismo) así como del conocimiento de sus partes más notables (subespacios, bases,...). Intervienen también en el estudio de un espacio vectorial el uso de las aplicaciones lineales de dicho espacio en otros o en sí mismo.

Cuestiones:

1. Indique qué es una ley externa.

2. Cite los cuatro axiomas del espacio vectorial, que relacionan la ley externa con las dos leyes del cuerpo (supóngase éste conmutativo).

3. Justifique haciendo uso de dichos axiomas las siguientes propiedades:

a) $t.\dot{o} = \dot{o}$, para todo $t \in K$ y el $\dot{o}$, neutro de (V, +).

b) $o.\dot{a} = \dot{o}$, para todo $\dot{a} \in V$ y O, cero del cuerpo.

c) $t.\dot{a} = \dot{o}$, con $\dot{a} \in V$ y $t \in K$, implica que uno de estos elementos es el respectivo cero.

Indique por qué razón esta implicación no es cierta en el caso de estructura de módulo.

4. Cite las dos condiciones que debe cumplir una aplicación $f: V \to V'$, para que sea aplicación lineal del espacio (K, V, .), en el espacio (K, V', .).

5. Justifique que una aplicación de la forma $f(\dot{a}) = r.\dot{a}$, para todo a de V, y siendo r un elemento fijo de K, de un espacio en sí mismo, es lineal.

6. Cite las condiciones que debe cumplir una parte de S de un espacio vectorial, para que sea subespacio del mismo.

CONCURSO OPOSICION PARA INGRESO EN EL CUERPO DE PROFESORES DE E.G.B.

A) Prueba eliminatoria de madurez cultural. Junio de 1976.

Resolución de un problema:

Las siguientes fuerzas actúan sobre un cuerpo P

$$F_1 = (2, 3),\ F_2 = (-5, 1),\ F_3 = (1, 2),\ F_4 = (5, -2)$$

y están medidas en Nw.

a) Hallar la resultante de las fuerzas F_1, F_2, F_3, F_4 y hacer su representación gráfica. Hallar el módulo de la fuerza resultante.

b) ¿Cuál es el coseno del ángulo que forma la resultante con el eje X?

c) Los vectores F_1, F_2, F_3, F_4. ¿Son linealmente independientes? ¿Por qué?

d) Hallar el subespacio vectorial formado por el vector F_1. ¿Es el mismo que el formado por el vector F_2?

CONCURSO OPOSICION PARA INGRESO EN EL CUERPO DE PROFESORES DE E.G.B.

A) Prueba eliminatoria de madurez cultural. Junio de 1977.

Resolución de un problema:

En el conjunto de círculos de un plano se consideran diversas relaciones entre los círculos C y C'.

1.º C es exterior a C'.

2.º C y C' tienen el mismo centro.

3.º C y C' son secantes.

4.º C y C' son ortogonales.

Precisar en cada caso, si se trata de una relación de equivalencia o qué propiedades de las tres clásicas se verifican.

CONCURSO OPOSICION PARA INGRESO EN EL CUERPO DE PROFESORES DE E.G.B.

A) Prueba eliminatoria de madurez cultural. Junio de 1978.

Lea atentamente el siguiente problema y conteste a las cuestiones que se formulan a continuación:

Un tribunal de Oposiciones clasifica a las personas presentadas a las pruebas en tres clases:

— Varones, a cuyo conjunto llama V.

— Especialistas en Filología, a cuyo conjunto llama F.

— Con servicios interinos, a cuyo conjunto llama I.

El cómputo de Opositores da la siguiente información:

— El número total de personas presentadas es de 250.

— El cardinal de V (número de opositores varones) es 124.

— El cardinal de F es 99.

— El cardinal de I es 121.

— De los varones, 51 pertenecen a I y 45 pertenecen a F.

— De los especialistas en Filología, 38 pertenecen a I.

— 20 personas tienen las tres características: son varones, especialistas en Filología y tienen Servicios interinos.

Hacer un diagrama conjuntista que ilustre la situación.

Razonar:

— Cuántos varones no tienen servicios interinos ni son especialistas en Filología.

— Cuántas personas con servicios interinos son mujeres y no especialistas en Filología.

Los dos números obtenidos, junto con uno de los datos, pueden ser medidas (en la misma unidad) de los lados de un triángulo, al que se llama T. Hallar la altura sobre la hipotenusa de ese triángulo T.

Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar el triángulo T alrededor de la hipotenusa.

Representar gráficamente, en un sistema de ejes cartesianos, los pares de números reales que pueden ser catetos de un triángulo rectángulo de igual área que T.

CONCURSO OPOSICION PARA INGRESO EN EL CUERPO DE PROFESORES DE E.G.B.

A) Prueba eliminatoria de madurez cultural. Junio de 1979.

Lea atentamente el siguiente problema y conteste a las cuestiones que se formulan a continuación.

1) En un Banco hay tres cajeros, a los que llamaremos P, Q y R, con 1 año, 2 años y 3 años de antigüedad en el empleo respectivamente. El Banco decide pagar un incentivo mensual a cada cajero, para lo que destina una cantidad fija mensual que el primer mes distribuye proporcionalmente a la antigüedad de cada uno. El segundo mes, en cambio, hace de esa cantidad mensual tres partes desiguales de a, b y c billetes de mil pesetas, de modo que $2b = a + c$, y las sortea entre los cajeros. El tercer mes vuelve a sortear las mismas tres partes, siendo esta vez el menos favorecido el cajero Q. En total, entre los tres repartos, P ha cobrado 15.500 pesetas, Q ha cobrado 19.000 pesetas y R ha cobrado 28.500 pesetas.

Se pide:

— Hallar a, b y c.

— *Hacer una tabla de doble entrada explicativa* de las cantidades que cada cajero cobró cada mes como incentivo, así como de los totales pagados por el Banco y recibidos por los cajeros.

2) El cajero Q destina su incentivo a un pequeño negocio de compraventa. El compra en almacén con descuento de 2 por ciento sobre precio de catálogo y luego revende con aumento de 47 por ciento sobre precio de catálogo.

— Razonar cuál es el tanto por ciento de ganancia que obtiene sobre el dinero que emplea.

3) Ese mismo Banco solicita periódicamente empleados eventuales, a los que ofrece las siguientes modalidades de contrato:

modalidad a) 15.000 pesetas a la firma del contrato y 1.000 pesetas semanales;

modalidad b) 13.000 pesetas a la firma del contrato y 2.000 pesetas semanales.

modalidad c) 3.000 pesetas a la firma del contrato y 3.000 pesetas semanales.

— Estudiar qué modalidad resulta más conveniente para el contratado según sea el número de semanas que trabaje.

— Hacer una representación gráfica de cada una de las modalidades de contrato con referencia al mismo sistema de ejes cartesianos.

— Hallar cuántas semanas hay que trabajar para que el contrato c) haga cobrar el 75% de la suma de los contratos a) y b).

CONCURSO OPOSICION PARA EL INGRESO EN EL CUERPO DE PROFESORES DE E.G.B.

A) Prueba eliminatoria de madurez cultural. Junio de 1980.

Lea atentamente y resuelva los problemas que se le proponen a continuación:

1. a) Simplificar la expresión siguiente teniendo en cuenta que el complementario de un conjunto C lo expresamos mediante $\bar{C}$.

$$(\overline{A \cap B}) \cap [\overline{B \cap (A \cap B)}]$$

b) Si A tiene 23 elementos, $A \cup B$ tiene 41 elementos y $A \cap B$ tiene 8 elementos, ¿cuántos elementos tendrá: B, $A - B$ y $B - A$?

2. a) De un trapecio rectángulo ABCD, sabemos que $\hat{A} = \hat{B}$, $\hat{D} = \frac{1}{3}\hat{C}$, la base AD mide 8 m., la base BC mide 50 dm. Calcular su área.

b) Si el vértice A está en el origen de coordenadas, la base AD sobre el eje X. Calcular las coordenadas de los vértices del trapecio transformado por una simetría de eje X.

3. Calcular el volumen mínimo que debe tener un recipiente para que se pueda llenar con un número exacto de vasijas de 5 litros, 8 litros y 12 litros de capacidad.

CONCURSO OPOSICION PARA EL INGRESO EN EL CUERPO DE PROFESORES DE E.G.B.

A) Prueba eliminatoria de madurez cultural. Junio de 1981.

Lea atentamente y resuelva los problemas que se le proponen a continuación:

1. Siendo X, Y, Z, subconjuntos de U, simplificar la expresión:

$$[X \cap (\overline{Y \cap Z})] \cup [\overline{(\bar{X} \cup \bar{Y}) \cup Z}]$$

teniendo en cuenta que el complementario de un conjunto cualquiera A lo expresamos mediante $\bar{A}$.

2. Un número es mayor de 600 y menor que 700, la cifra de las unidades es la tercera parte de la cifra de las decenas y el número invertido es los 4/7 del primitivo, ¿cuál es éste?

3. En un trapecio isósceles el ángulo A mide 45º, la base ÂB 10 metros y la CD 4 metros:

a) Calcular su área expresada en hectáreas.

b) Si el vértice A está en el origen de coordenadas y la base AB sobre el eje X, calcular las coordenadas de los vértices del trapecio transformado por una simetría del eje X.

c) Calcular el volumen en litros del cuerpo que resulta al girar el trapecio alrededor del eje X.

CONCURSO OPOSICION PARA EL INGRESO EN EL CUERPO DE PROFESORES DE E.G.B.

A) Prueba eliminatoria de madurez cultural. Junio de 1982.

Razone por escrito y resuelva lo siguiente:

1. El número de páginas de un libro es mayor que 400 y menor que 500. Si se cuentan de dos en dos, sobra una; de tres en tres sobran dos; de 5 en 5 sobran 4 y de 7 en 7, sobran 6. ¿Cuántas páginas tiene el libro?

2. Calcular el área del triángulo curvilíneo comprendido entre 3 circunferencias iguales tangentes exteriores dos a dos y de radio 5 m. Expresar el resultado en áreas.

3. Un triángulo equilátero tiene un vértice en el origen de coordenadas, otro en el punto (4, 0):

a) Calcular las coordenadas del tercer vértice sabiendo que está situado en el primer cuadrante.

b) Sometiéndolo a una simetría de eje XX' calcular las nuevas coordenadas de los vértices.

c) Calcular su área.

CONCURSO OPOSICION PARA EL INGRESO EN EL CUERPO DE PROFESORES DE E.G.B.

A) Prueba eliminatoria de madurez cultural. Junio de 1983

Lea atentamente y resuelva los problemas que se le proponen a continuación:

1) En Z × Z se establece la siguiente relación:

$$(a,b)\ R\ (c,d) \Longleftrightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2.$$

Estudiarla.

(Z conjunto de los números enteros).

2) Partiendo de que el metro es aproximadamente la diezmillonésima parte del cuadrante terrestre, expresar en miriámetros cuadrados la superficie de un huso horario.

3) Cuando dos bombas actúan a la vez, tardan en agotar un depósito 15 horas. Si actuase la menor, tardaría en agotarlo 16 horas más que si actuase sólo la mayor. ¿Cuánto tardaría ésta?

COMPLEMENTO A LA TERCERA EDICION

Resolución de los problemas propuestos en la Prueba A) del Concurso-Oposición para el ingreso en el Cuerpo de Profesores de E.G.B.

Año 1974

Al tratarse de cuestiones teóricas el lector puede consultar cualquier libro que trate sobre estos temas, por ejemplo, «*Matemáticas para magisterio 1*» del mismo autor, editado por Publicaciones Tema en 1983.

Año 1975

Al tratarse también de cuestiones teóricas el lector puede consultar cualquier libro que trate sobre estos temas, por ejemplo, *Matemáticas 1.º* del mismo autor, editado por H.S.R. en 1980.

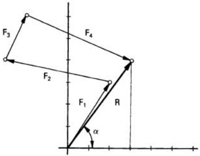
Año 1976

Sobre unos ejes cartesianos representamos las fuerzas y su resultante.

a) vector R resultante tiene de componentes 3 y 4, siendo su módulo

$$a = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

b) Su coseno es cos $\alpha = \dfrac{3}{5}$



c) Los vectores F_1, F_2, F_3 y F_4 no son linealmente independientes ya que al estar en un espacio vectorial de dimensión 2 sólo pueden ser como máximo 2 los vectores linealmente independientes.

d) El subespacio vectorial engendrado por el vector F_1 lo forman todos los vectores que resultan de multiplicarlo por un número real estando contenidos en la misma recta soporte del vector F_1.

De igual forma el subespacio vectorial engendrado por el vector F_2 lo componen los vectores contenidos en la recta soporte de F_2.

Los dos subespacios vectoriales son de dimensión 1 pero son distintos, ya que son distintos los vectores que los engendran.

Año 1977

1) Cumple la propiedad simétrica.

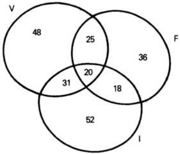
2) Cumple la propiedad reflexiva, simétrica y transitiva; es una relación de equivalencia.

3) Cumple la propiedad simétrica.

4) Cumple la propiedad simétrica. (Dos circunferencias son ortogonales cuando los radios correspondientes a los puntos de corte son perpendiculares.

Año 1978

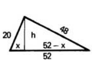
—Diagrama conjuntista.



a) Los varones que no tienen servicios interinos ni son especialistas en Filología son 48.

b) Personas con servicios interinos que son mujeres y no especialistas en Filología hay 52.

—El dato del enunciado que junto con los dos números obtenidos forman los lados de un triángulo rectángulo T es 20.



$$52^2 = 48^2 + 20^2$$

La altura h sobre la hipotenusa la calculamos así:

$$\text{Area} = \frac{20 \times 48}{2} = \frac{52 \times h}{2} \Rightarrow h = \frac{240}{13} = 18{,}46 \text{ u}$$

—El volumen del cuerpo engendrado es:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{3}\pi h^2 x + \frac{1}{3}\pi h^2 (52 - x) = \frac{1}{3}\pi h^2 \cdot 52 =$$

$$= \frac{1}{3}\pi \cdot 340{,}77 \cdot 52 = 5906{,}68\ \pi\ u^3$$

—Para representar gráficamente los pares de números reales que pueden ser catetos de un triángulo de igual área que T calculamos previamente el área

$$A = \frac{20 \times 48}{2} = 480\ u^2$$

Llamando x e y a los catetos

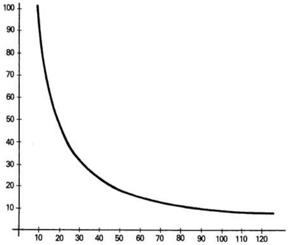
$$A = \frac{x \cdot y}{2} = 480 \Rightarrow xy = 960$$

$$y = \frac{960}{x}$$

Se trata de una parábola y dando valores a x obtenemos la tabla

x	5	10	20	30	40	60	80	160	240
y	192	96	48	32	24	16	12	6	4

La representación gráfica es:



Año 1979

① En total: $15.500 + 19.000 + 28.500 = 63.000$ ptas.

Cada mes el Banco paga: $\dfrac{63.000}{3} = 21.000$ ptas.

El primer mes lo reparte proporcionalmente a la antigüedad.

$$x + 2x + 3x = 21 \Rightarrow x = 3{,}5$$

Por tanto el primer mes ganan

Cajero P = 3.500 ptas. ; Cajero Q = 7.000 ptas.

y Cajero R = 10.500 ptas.

Después se tiene

$$\left.\begin{aligned} a + b + c &= 21 \\ 2b &= a + c \end{aligned}\right\} 3b = 21 \Rightarrow b = 7$$

sustituyendo: $a + c = 14$

Si el cajero Q cobra el primer mes 7 billetes de mil, el segundo mes b y el tercer mes a, resulta:

$$7 + b + a = 19$$

como $b = 7 \Rightarrow a = 5$ y $c = 2b - a = 14 - 5 = 9$

Los valores son: $a = 5$, $b = 7$ y $c = 9$

Formamos una tabla de doble entrada con el dinero percibido

cajero / mes	P	Q	R	Total
1.°	3.500	7.000	10.500	21.000
2.°	5.000	7.000	9.000	21.000
3.°	7.000	5.000	9.000	21.000
Total	15.500	19.000	28.500	63.000

② Supuesto el precio de catálogo 100 compra con un 2% de descuento, es decir, a 98, y vende con un 47% de aumento sobre catálogo, es decir a 147.

El aumento vendrá dado por:

$$\left.\begin{array}{l} 98 \text{ ------------ } 147 \\ 100 \text{ ------------ } x \end{array}\right\} x = 150$$

El aumento es del 50% porque pasa a 100 a 150.

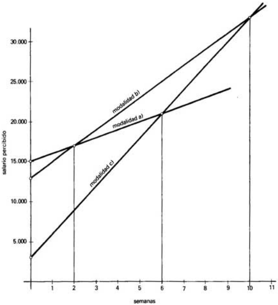
③ Teniendo en cuenta que:

modalidad a): 15.000 + 1.000 x
modalidad b): 13.000 + 2.000 x
modalidad c): 3.000 + 3.000 x

siendo x el número de semanas, efectuamos la siguiente tabla

semanas / modal.	1.ª	2.ª	3.ª	4.ª	5.ª	6.ª	7.ª	8.ª	9.ª	10.ª	11.ª
a)	16.000	17.000	18.000	19.000	20.000	21.000	22.000	23.000	24.000	25.000	26.000
b)	15.000	17.000	19.000	21.000	23.000	25.000	27.000	29.000	31.000	33.000	35.000
c)	6.000	9.000	12.000	15.000	18.000	21.000	24.000	27.000	30.000	33.000	36.000

La 1.ª semana resulta más conveniente la modalidad a).
La 2.ª semana resulta más conveniente la modalidad a) y b).
La 3.ª semana resulta más conveniente la b) hasta la 9.ª semana.
La 10.ª semana resulta más conveniente b) y c).
Desde la 11.ª en adelante resulta más conveniente c).



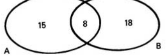
Para la última parte

$$c = 0{,}75\ (a + b)$$
$$3.000 + 3.000\ x = 0{,}75\ (15.000 + 1.000\ x + 13.000 + 2.000\ x)$$
$$3.000 + 3.000\ x = 0{,}75\ (28.000 + 3.000\ x)$$
$$750\ x = 18.000$$
$$x = 24 \text{ semanas}$$

Año 1980

① a) $\overline{(A \cap B)} \cap [\overline{B \cap (A \cap B)}] = \overline{(A \cap B)} \cap [\overline{B} \cup \overline{(A \cap B)}] =$
$= \overline{A \cap B}$

b) $n(A) = 23$; $n(A \cup B) = 41$; $n(A \cap B) = 8$

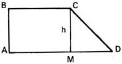


$n(B) = n(A \cup B) - n(A) + n(A \cap B) = 41 - 23 + 8 = 26$

$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 23 - 8 = 15$

$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 26 - 8 = 18$

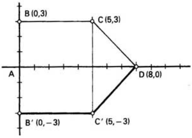
② a)



$$\left.\begin{aligned} \hat{A} + \hat{B} &= 180^\circ \\ \hat{C} + \hat{D} &= 180^\circ \\ \hat{D} &= \frac{1}{3}\hat{C} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \hat{C} &= 135^\circ \text{ y} \\ \hat{D} &= 45^\circ \end{aligned}$$

El triángulo rectángulo CDM es isósceles, luego: $h = CM = 3$

$$\text{Area} = \frac{B + b}{2} \times h = \frac{8 + 5}{2} \times 3 = 19{,}5 \text{ m}^2$$



③ m.c.m. (5, 8, 12) = 120 litros

Año 1981

① $$[X \cap \overline{(Y \cap Z)}] \cup [\overline{(\bar{X} \cup \bar{Y}) \cup Z}] = [X \cap \overline{(Y \cap Z)}] \cup [\overline{(\bar{X} \cup \bar{Y})} \cap \bar{Z}] =$$
$$= [X \cap \overline{(Y \cap Z)}] \cup [(X \cap Y) \cap \bar{Z}] =$$
$$= [X \cap \overline{(Y \cap Z)}] \cup [X \cap (Y \cap \bar{Z})] =$$
$$= X \cap [\overline{(Y \cap Z)} \cup (Y \cap \bar{Z})] = X \cap [(\bar{Y} \cup \bar{Z}) \cup (Y \cap \bar{Z})] =$$
$$= X \cap \{[(\bar{Y} \cup \bar{Z}) \cup Y] \cap [(\bar{Y} \cup \bar{Z}) \cup \bar{Z}]\} =$$
$$= X \cap [\bar{Z} \cap (Y \cup \bar{Z})] = X \cap \bar{Z}$$

② Llamando n al número

$$600 < n < 700$$
$$n = 6ba \quad y \quad 3a = b$$

Se tiene

$$n = 6\,(3a)\,a = 600 + 30a + a = 600 + 31a$$
$$n' = a\,(3a)\,6 = 100a + 30a + 6 = 130a + 6$$

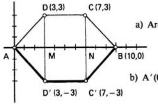
Por hipótesis:

$$4n = 7n'$$
$$4(600 + 31a) = 7\,(130a + 6)$$
$$2400 + 124a = 910a + 42$$
$$a = 3$$
$$b = 3a = 9$$

El número pedido es:

$$n = 693$$

③



a) Area $= \frac{B + b}{2} \times h = \frac{10 + 4}{2} \times 3 =$

$= 21 \text{ m}^2 = 0{,}0021$ ha

b) $A'(0,0)$; $B'(10,0)$; $C'(7, -3)$; $D'(3, -3)$

c) $\text{Volumen} = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot MA + \pi r^2 MN + \frac{1}{3}\pi r^2 NB =$

$$= \frac{1}{3}\pi r^2 (MA + 3\,MN + NB) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 (3 + 12 + 3) = 54\,\pi \text{ m}^3$$

Año 1982

① Siendo n el número de páginas del libro

$$n = \dot{2} + 1 = \dot{2} + (2 - 1) = \dot{2} - 1$$
$$n = \dot{3} + 2 = \dot{3} + (3 - 1) = \dot{3} - 1$$
$$n = \dot{5} + 4 = \dot{5} + (5 - 1) = \dot{5} - 1$$
$$n = \dot{7} + 6 = \dot{7} + (7 - 1) = \dot{7} - 1$$

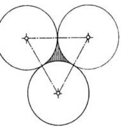
Luego

$$\left.\begin{array}{l} n + 1 = \dot{2} \\ n + 1 = \dot{3} \\ n + 1 = \dot{5} \\ n + 1 = \dot{7} \end{array}\right\} \text{ m. c. m. } (\dot{2}, \dot{3}, \dot{5}, \dot{7}) = 2\dot{1}0$$

Como el libro tiene un número de páginas entre 400 y 500 tomamos como m. c. m. 420.

$$n + 1 = 420$$
$$n = 419$$

② El área pedida corresponde al área señalada en el dibujo



Area triángulo curvilíneo = Area triángulo equilátero − 3 × Area sector circular =

$$= \frac{l^2\sqrt{3}}{4} - 3\frac{\pi r^2}{360} n = \frac{(2r)^2\sqrt{3}}{4} - 3\frac{\pi r^2}{360} \times n =$$

$$= \frac{100\sqrt{3}}{4} - 3 \cdot \frac{25\pi}{360} \cdot 60 = 25\sqrt{3} - \frac{25}{2}\pi =$$

$$= 25(\sqrt{3} - 0{,}5\,\pi)\,m^2 = 0{,}25(\sqrt{3} - 0{,}5\,\pi) \text{ áreas}$$

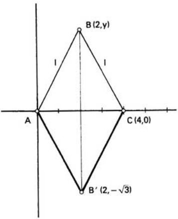
③ a) Dibujamos sobre los ejes cartesianos el triángulo equilátero pedido.

$$l^2 = (2 - 0)^2 + (y - 0)^2$$
$$16 = 4 + y^2 \Rightarrow y^2 = 12$$
$$y = 2\sqrt{3}$$
$$y = -2\sqrt{3}$$

Como el triángulo está en el primer cuadrante tomamos

$y = 2\sqrt{3}$

$B(2,\ 2\sqrt{3})$



b) A' (0,0) , B' (2, $-2\sqrt{3}$) y C' (4,0)

c) Area del triángulo $= \dfrac{b \times h}{2} = \dfrac{4 \times 2\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}\ u^2$

Año 1983

① La relación $\mathcal{R}$ cumple las siguientes propiedades

—Reflexiva: $(a, b)\ \mathcal{R}\ (a, b)$ pues $a^2 + b^2 = a^2 + b^2$

—Simétrica: Si $(a, b)\ \mathcal{R}\ (c, d)$ también $(c, d)\ \mathcal{R}\ (a, b)$

En efecto

Si $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ también $c^2 + d^2 = a^2 + b^2$

—Transitiva: Si $(a, b)\ \mathcal{R}\ (c, d)$ y $(c, d)\ \mathcal{R}\ (e, f)$ entonces

$(a, b)\ \mathcal{R}\ (e, f)$

En efecto:

Si $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ y $c^2 + d^2 = e^2 + f^2$ entonces

$$a^2 + b^2 = e^2 + f^2$$

Se trata de una relación de equivalencia dando lugar a un conjunto cociente estando formada cada clase por todos los pares de números enteros cuya suma de cuadrados sea igual.

Así en la clase (1, 2) están los pares

$(-1, 2), (1, -2), (-1, -2), (2, 1), (-2, 1), (2, -1)$ y $(-2, -1)$

pues el primer elemento de cada par elevado al cuadrado más el segundo elemento elevado al cuadrado en todos los casos vale 5.

2 L = Longitud del círculo máximo de la esfera terrestre

$$L = 2\pi r = 4 \times 10.000.000 = 4 \times 10^7 \text{ m}$$

$$r = \frac{4 \times 10^7}{2\pi} = \frac{2 \times 10^7}{\pi} \text{ m.} = \frac{2000}{\pi} \text{ mam}$$

El huso horario tiene de amplitud $= \frac{360°}{24} = 15°$

La superficie del huso horario es

$$A = \frac{\pi r^2}{90} \times n = \frac{\pi(\frac{2000}{\pi})^2}{90} \times 15 = \frac{4.000.000}{6\pi} = \frac{2.000.000}{3\pi} \text{ mam}^2$$

3 La bomba mayor tarda: x horas.
La bomba menor tarda: (x + 16) horas.
La capacidad del depósito es: 1.

Se tiene

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+16} = \frac{1}{15}$$

de donde

$$15(x + 16) + 15x = x(x + 16)$$
$$x^2 - 14x - 240 = 0$$
$$x = 24 \text{ y } x = -10$$

La bomba mayor tarda en agotar el depósito 24 horas.

Indice

Conjuntos • Relaciones • Números naturales • Operaciones con números naturales • Fracciones y decimales • Sistema métrico decimal. Medidas de longitud, capacidad y masa • Medidas de tiempo y dinero • Elementos y figuras en la geometría del plano. Igualdad en el plano • Medidas de superficie. Medida de figuras planas • Geometría en el espacio.

Conjuntos • Relaciones • Aplicaciones • Estructuras algebraicas • Números naturales. Sistemas de numeración • Números enteros y racionales • Divisibilidad y congruencias • Conceptos fundamentales de geometría • Estudio de polígonos. Areas • Estudio sobre la circunferencia • Relaciones métricas en un triángulo • Poliedros: Areas y volúmenes • Apéndice.

Teoría de conjuntos • Relaciones • Aplicaciones • Números Naturales • Sistemas de Numeración • Divisibilidad en N • Números Enteros y Racionales • Areas de Figuras Planas • Geometría del plano • Traslaciones, Giros y Simetrías • Apéndice: Problemas Oposiciones. E.G.B. Prueba A).

Estructuras • Espacios Vectoriales • Determinantes, Matrices y Sistemas • Aplicaciones lineales y bilineales • Polinomios • Transformaciones ortogonales. Homotecias y semejanzas • Areas y volúmenes de cuerpos geométricos • Apéndice: Problemas. Oposiciones E.G.B. Prueba B).

Frecuencias, tablas y gráficos • Medidas de tendencia central • Medidas de dispersión y asimetría • Regresión y correlación • Probabilidad • Distribución de una variable aleatoria • Distribución binomial y de Poisson • Distribución normal • Apéndice • Tablas.

PUBLICACIONES
tema
Merced, 7
MURCIA-1